MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Une approche formelle et une approche intuitive des fonctions exponentielles pour les sciences de la vie.

Marlet, Julie

Award date:
2002

Thiry Suzanne
Dpt de Mathématique

FUNDP
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Rempart de la Vierge, 8
B-5000 Namur Belgique

UNE APPROCHE FORMELLE ET UNE APPROCHE INTUITIVE DES FONCTIONS EXPONENTIELLES POUR LES SCIENCES DE LA VIE

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade de
Licencié en Sciences Mathématiques
par

JULIE MARLET

Promoteurs : Suzanne Thiry
et Eric Depiereux

Année Académique 2001-2002

Je voudrais remercier les personnes qui ont participé à l'élaboration de mon mémoire.

Mes premiers remerciements vont à Suzanne Thiry qui m'a fortement épaulée, conseillée et qui est restée disponible tout au long de mon travail.

Je tiens également à remercier Eric Depiereux pour sa gentillesse, ses précieux conseils et son écoute toujours attentive.

Je voudrais terminer en remerciant Jacques Van Cleeve pour son aide lors de la création du CD-rom.

Résumé

Le but de ce mémoire est d'élaborer un module de cours d'auto-apprentissage interactif visant à familiariser les étudiants de fin d'humanités ou de début de premier cycle universitaire en sciences de la vie, avec les fonctions exponentielles, les fonctions logarithmes et leurs interprétations dans des problèmes concrets, suivant une voie formelle et une voie intuitive.

Abstract

Our purpose is to draw up a module of interactive self-learning course dedicated to students in the secondary school or beginning a life science graduate. This module introduces to exponential and logarithmic functions, and their interpretation in practical problems, following a formal or an intuitive learning process.

INTRODUCTION **4**

CHAPITRE 1 : LES CHOIX DIDACTIQUES **6**

CHAPITRE 2 : LE SYSTÈME AUTEUR **8**

1.DESCRIPTION DU PROJET MAI 8
2.STRUCTURE D'UN COURS INTERACTIF 9
2.1. Le réseau sémantique *9*
2.2. L'unité d'apprentissage *10*
3. PRÉSENTATION DES ÉCRANS 11

CHAPITRE 3 : LE PARCOURS THÉORIQUE **12**

1.LA CARTE DE NAVIGATION DU PARCOURS THÉORIQUE 14
2.QU'EST-CE QUE LE LOGARITHME NÉPÉRIEN OU NATUREL ? 15
Contenu et découpages en écrans *15*
Discussions *22*
3.COMMENT PEUT-ON REPRÉSENTER LA FONCTION LNX ? 23
Contenu et découpages en écrans *23*
Discussions *27*
4.POURQUOI LA FONCTION « LNX » EST – ELLE UTILE ? 28
Contenu et découpages en écrans *28*
Discussions *34*
5.ENTRAÎNONS-NOUS. 35
Contenu et découpages en écrans *35*
Discussions *42*
6.N'EXISTE-T-IL QU'UN LOGARITHME ? 44
Contenu et découpages en écrans *44*
Discussions *48*
7.ENTRAÎNONS-NOUS 49
Contenu et découpages en écrans *49*
Discussions *52*
8.UNE NOUVELLE FONCTION : LA FONCTION EXPONENTIELLE. 53
Contenu et découpages en écrans *53*
Discussions *55*
9. COMMENT PEUT-ON REPRÉSENTER GRAPHIQUEMENT E^X ? 56
Contenu et découpages en écrans *56*
Discussions *59*
10.QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION EXPONENTIELLE 60

Contenu et découpages en écrans *60*
Discussions *64*
11. Si plusieurs fonctions logarithmes, pourquoi pas plusieurs fonctions exponentielles ? 65
Contenu et découpages en écrans *65*
Discussions *69*
12. Représentation graphique de A^X 71
Contenu et découpages en écrans *71*
Discussions *76*
13. Entraînons-nous 77
Contenu et découpages en écrans *77*
Discussions *86*
14. Synthèse générale sur les fonctions logarithmes et exponentielles. 88
Contenu et découpages en écrans *88*
Discussions *96*

CHAPITRE 4 : LE PARCOURS INTUITIF **97**

1. La carte de navigation du parcours intuitif 99
2. La multiplication cellulaire 100
Contenu et découpages en écrans *100*
Discussions *103*
3. La population initiale 104
Contenu et découpages en écrans *104*
Discussions *107*
4. Le coefficient de multiplication 108
Contenu et découpages en écrans *108*
Discussions *111*
5. Le modèle $Y(T) = Y_0A^T$ 112
Contenu et découpages en écrans *112*
Discussions *115*
6. Vers un temps négatif ? 116
Contenu et découpages en écrans *116*
Discussions *120*
7. Analyse graphique de la fonction 121
Contenu et découpages en écrans *121*
Discussions *124*
8. Une exponentielle décroissante ? 125
Contenu et découpages en écrans *125*
Discussions *128*
9. Exploration de l'histoire antérieure 129

Contenu et découpages en écrans *129*
Discussions *132*
10. SYNTHÈSE 133
Contenu et découpages en écrans *133*
Discussions *135*

CONCLUSIONS **136**

BIBLIOGRAPHIE **137**

Introduction

De nos jours, les mathématiques sont très souvent utilisées : on les retrouve dans des domaines tels que l'architecture, la construction ou encore dans des domaines plus scientifiques tels que la physique, la chimie ou la biologie. C'est à cette dernière discipline que nous nous sommes particulièrement intéressée.

Les biologistes sont parfois amenés à réaliser des observations sur des phénomènes comme la culture de bactéries et ils souhaitent en retirer des conclusions générales. Pour cela, il leur est indispensable d'avoir à leur disposition un modèle faisant intervenir différentes fonctions mathématiques. Les plus courantes de ces fonctions sont les fonctions exponentielles et logarithmes qui sont d'autant plus utilisées qu'elles sont à la base de bien d'autres fonctions utilisées dans les sciences de la vie.

On remarque que les étudiants du début du premier cycle en biologie ne maîtrisent pas toujours ces fonctions élémentaires et de ce fait ne les utilisent pas toujours correctement.

La question ici n'est pas de se demander pourquoi certains étudiants restent hostiles à ces fonctions mais plutôt de se demander comment changer les choses.

De là est venue l'idée de réaliser un outil d'auto apprentissage interactif sous forme d'un cd-rom et d'un site Internet, destiné aux étudiants de fin d'humanité ou de début de premier cycle universitaire en sciences de la vie rendant l'apprentissage de ces fonctions attrayant et adapté.

Deux raisons m'ont poussée à choisir ce travail. La première est que je me destine à une carrière d'enseignante et que j'attends de ce mémoire en didactique qu'il m'aide à construire un enseignement adapté à un public assez large, qui ne se destine pas nécessairement à des études de mathématiques.
Les fonctions exponentielles et logarithmes me sont bien sûr familières, comme objet mathématique, mais je me rends compte qu'on peut aussi les considérer du point de vue de leur signification et faire passer ce message lorsqu'on les enseigne.

J'ai également choisi ce mémoire car la collaboration avec des scientifiques spécialistes d'une discipline non mathématique me semblait enrichissante. Je souhaitais élargir ma vision de l'utilisation des mathématiques.

Ce travail comprend quatre chapitres. Un premier chapitre qui relate les choix didactiques posés lors du travail. Le deuxième chapitre est consacré à une description du système auteur choisi pour rendre le produit interactif. Lors de nos choix didactiques, nous avons décidé de proposer deux voies différentes, l'une théorique et l'autre plus intuitive. Ces deux parcours sont expliqués respectivement dans les chapitres trois et quatre.

Chapitre 1 : Les choix didactiques

Avant de commencer le travail, nous nous sommes posé plusieurs questions : comment procéder, quels choix faire, quel support utiliser, ...

Le support le plus classique est le livre mais c'est un support dans lequel l'élève est souvent passif. De plus, beaucoup de livres ont déjà été réalisés sur ce sujet. Notre choix s'est donc porté vers un outil d'apprentissage plus interactif, c'est-à-dire un outil qui interpelle l'utilisateur, qui le rend actif et l'attire.

Nous avons souligné l'enjeu du mémoire par l'importance de l'utilisation des fonctions exponentielles et logarithmes en biologie. Nous pouvons préciser cela en disant que les biologistes s'intéressent particulièrement aux paramètres de ces fonctions, à leurs significations et interprétations.

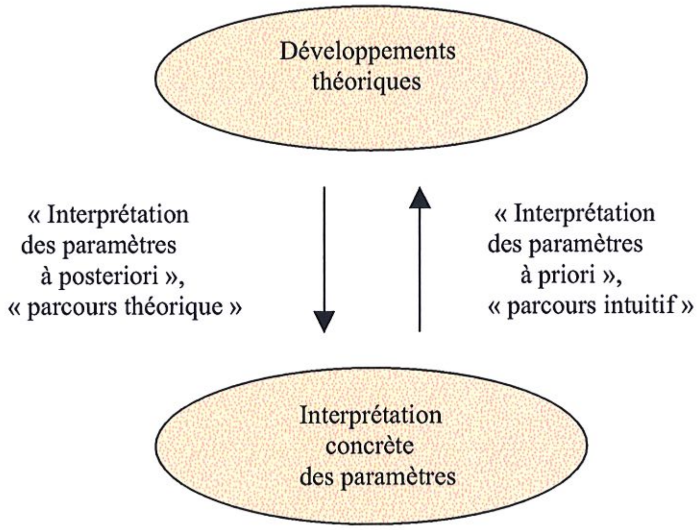
En effet, les biologistes récoltent des données en observant certains phénomènes et souhaitent à partir de celles-ci en déduire un modèle mathématique.
D'un autre coté, il est possible qu'ils aient à leur disposition un modèle sous forme d'une fonction dépendant de différents paramètres et qu'ils doivent donner une interprétation de ceux-ci.

Ces deux démarches sont différentes. C'est pour cela que nous avons développé dans notre travail deux parcours : un parcours intitulé « parcours intuitif » ou « interprétation des paramètres à priori » et un parcours intitulé « parcours théorique » ou «interprétation des paramètres à posteriori ».

Le premier parcours qui sera décrit est le parcours théorique. Il débute avec des développements théoriques pour ensuite passer à l'interprétation des paramètres. Cette partie est assez rigoureuse mais semble moins adaptée pour les étudiants en biologie. En effet, cette voie comporte toutes les définitions, propriétés des fonctions exponentielles et logarithmes et propose ensuite les applications en biologie. Ce parcours étant relativement théorique, il est en général moins attractif pour des étudiants du début du premier cycle en biologie. C'est pourquoi une réflexion a été menée pour le rendre accessible, attrayant et intéressant pour ces étudiants.

Le deuxième parcours est le parcours intuitif. Il débute par des exemples biologiques qui conduisent à la construction de fonctions dont les paramètres ont une signification immédiate.

Ces deux parcours peuvent être représentés comme ceci :



L'apprenant a donc le choix entre les deux parcours en fonction de ses envies et de ses besoins. Les deux voies étant indépendantes, il est libre d'en parcourir une sans parcourir l'autre.
Il nous paraît en effet important, dans un outil d'apprentissage interactif, de laisser des choix à l'utilisateur.

Chapitre 2 : Le système auteur

Comme nous avons décidé de faire de notre projet un outil d'apprentissage interactif, il fallait trouver un logiciel pour le rendre interactif.
Nous avons alors fait appel au logiciel développé dans le projet MAI (« Modules d'Apprentissage Interactif ») par les professeurs Eric Depiereux et Monique Noirhomme et illustré dans le cours « programme multimédia d'apprentissage des principes et des applications du génie génétique » (réf.[11]).
Nous allons décrire brièvement ce logiciel, sa structure et ses avantages, en se basant très largement sur un mémoire réalisé à propos de ce logiciel (réf. [14]).

1.Description du projet MAI

Le projet MAI permet d'exploiter, d'organiser et de relier différents types de données tels que le texte et les images de manière à rendre cet ensemble interactif.

Le système auteur fonctionne selon deux niveaux : celui du professeur et celui de l'apprenant.
Le professeur utilise le système auteur pour créer des modules de cours interactif, des questionnaires d'évaluation, ainsi que la carte de navigation suggérant le parcours sémantique que l'élève doit suivre lors de son apprentissage.
De son coté, l'apprenant consulte les modules de cours en respectant le parcours sémantique défini par l'auteur du cours. Il peut également évaluer son niveau d'apprentissage au moyen du questionnaire d'évaluation élaboré par l'auteur du cours.

Un autre objectif du projet MAI est de s'éloigner de l'approche linéaire des livres. En effet, le découpage d'un cours en différents modules, organisés selon un réseau sémantique, transforme l'apprentissage linéaire et statique des manuels en un enseignement personnalisé, en fonction des objectifs et acquis de l'apprenant. En outre, ce parcours individualisé, matérialisé par une carte de navigation offre à l'apprenant la possibilité de contrôler son avancement dans l'apprentissage d'un cours et d'évaluer son niveau d'apprentissage des concepts déjà vus.

2.Structure d'un cours interactif

Un cours interactif est divisé en une série d'objectifs.
Chaque objectif regroupe un ensemble de concepts appelés «unités d'apprentissage ». Ces unités d'apprentissage (UA) sont composées d'un certain nombre de pages et sont organisées dans un réseau sémantique, illustré par une carte de navigation.

2.1. Le réseau sémantique

L'auteur d'un cours élabore un réseau sémantique organisant les UA les unes par rapport aux autres. Ce réseau permet à l'élève de progresser d'une UA à une autre, selon un parcours suggéré par le professeur.
Le réseau sémantique est mis à la disposition de l'élève pendant son apprentissage, sous la forme d'une carte de navigation, afin de lui proposer un aperçu de son parcours. Un exemple de carte de navigation est repris dans la *figure 1*.

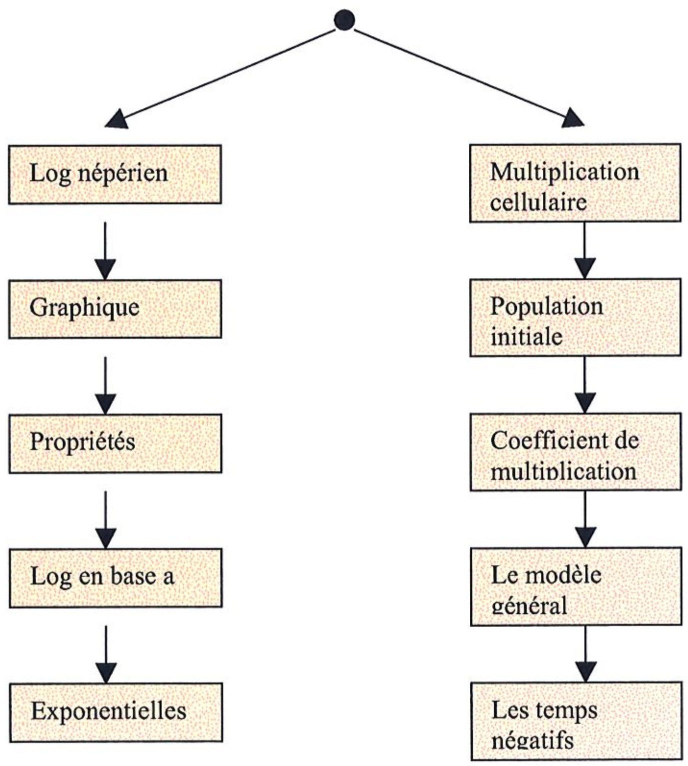


Figure 1 : schématisation d'une carte de navigation

2.2. L'unité d'apprentissage

Le système auteur MAI se base sur la notion de «concept ». En effet, chaque UA matérialise un concept qu'un professeur désire inculquer à ses élèves. Une UA est décrite dans une suite de pages qui rassemblent tous les textes, images, … ayant trait à un même concept théorique.

Une UA se compose :

- d'un noyau constitué d'une suite linéaire de pages.
- de ressources périphériques qui sont les informations secondaires.

Tous ces éléments sont schématisés sur la *figure 2.*

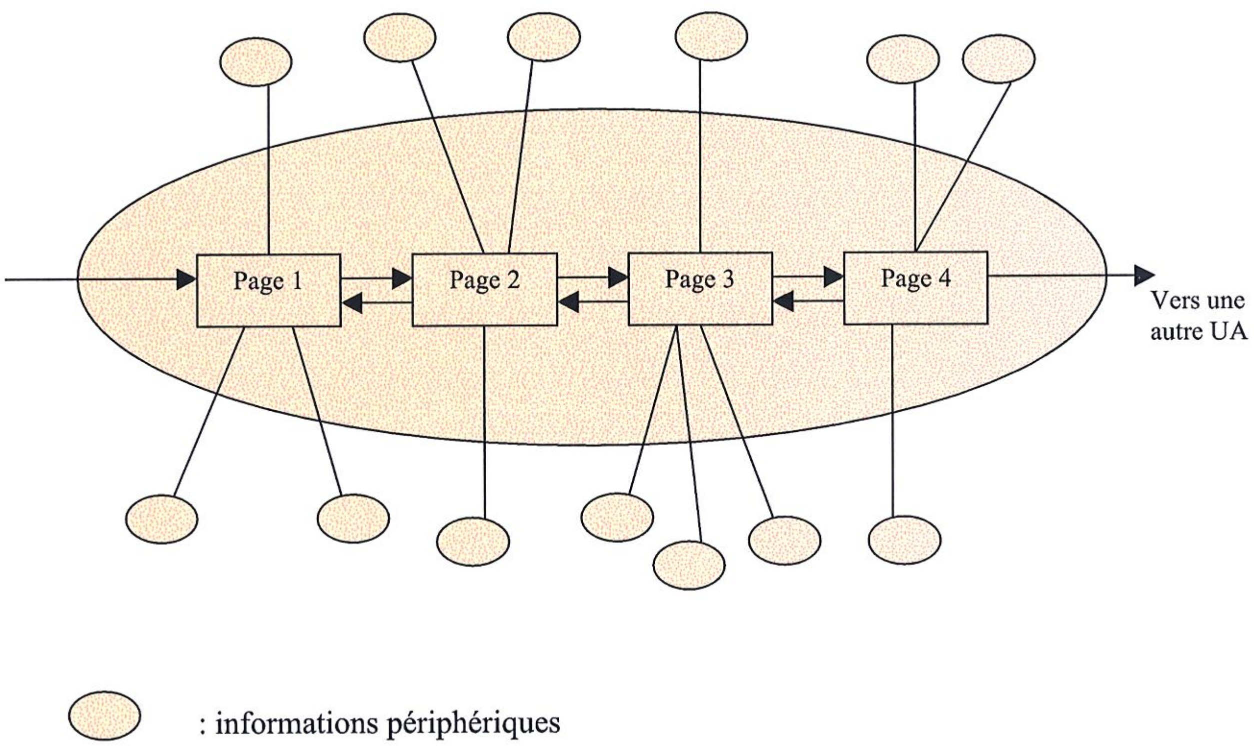


Figure 2 : schématisation d'une unité d'apprentissage

3. Présentation des écrans

Lorsque l'élève commence le cours, il se trouve face à la carte de navigation qui lui permet de choisir l'UA qu'il désire entreprendre. Lorsqu'il a fait ce premier choix, il débute réellement le cours.
Chaque écran est divisé en deux.
La partie de droite est réservée aux pages principales, reprenant l'exposé du cours.
Comme chaque UA comporte plusieurs pages, l'élève est libre de faire défiler les pages à la vitesse qu'il désire. De plus, si un concept lui a échappé, il peut revenir le visionner en retournant en arrière.
La partie gauche de l'écran est réservée aux pages périphériques. Ces pages sont accessibles en cliquant sur une petite icône qui est proposée dans la partie droite de l'écran.

Une attention toute particulière est portée sur l'agencement des écrans et en particulier sur les passages d'un écran à l'autre. Il est important pour la compréhension de l'exposé de ne pas changer d'écran au milieu d'une phrase ou d'un raisonnement.

La quantité de texte sur chaque écran doit être étudiée : un exposé avec des écrans trop encombrés est difficile à suivre.

D'autres choses sont encore étudiées pour rendre le produit intéressant : les couleurs, la taille des caractères, les dessins, le vocabulaire, ...

Chapitre 3 : Le parcours théorique

Avant d'entamer la confection de ce produit didactique consacré aux fonctions exponentielles et logarithmes, nous avons consulté plusieurs ouvrages (réf. [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [12], [13], [15], [16], [17]). Nous avons remarqué que chaque manuel utilise, pour définir les fonctions exponentielles et logarithmes, une stratégie qui lui est propre. Certains auteurs préfèrent introduire les fonctions exponentielles pour passer ensuite aux fonctions logarithmes. Cette voie étant en général plus intuitive, nous la réserverons au deuxième parcours (chapitre 4) où les fonctions étudiées sont construites à partir d'exemples concrets. Dans le présent parcours, nous avons donc opté pour un autre choix qui consiste à d'abord définir les fonctions logarithmes pour ensuite introduire les fonctions exponentielles.

Les six premières UA de ce parcours sont consacrées aux fonctions logarithmes et les six suivantes aux fonctions exponentielles. Nous avons terminé ce parcours par une synthèse sur les deux types de fonctions.

Les développements mathématiques qui y figurent utilisent des concepts supposés acquis tels que la dérivée, les manipulations de graphes, les fonctions réciproques, ...
Toutefois, comme nous pensons que beaucoup d'étudiants ont oublié certains de ces concepts, nous les avons rappelés dans les pages périphériques. Il suffit alors à l'apprenant, pour les consulter, de cliquer sur la petite icône correspondante et le rappel apparaît sur la partie gauche de l'écran, réservée aux pages périphériques.

Nous présentons, dans ce parcours, beaucoup de propriétés. Pour la plupart de ces propriétés, nous avons développé une démonstration. Afin de ne pas interrompre l'exposé, nous avons préféré placer celles-ci dans les pages périphériques. Ces preuves n'étant pas indispensables, l'étudiant ne souhaitant pas les consulter peut suivre la suite du cours sans aucune difficulté.

Par facilité pour le lecteur, les différents écrans sont reproduits dans ce manuscrit.
D'abord nous présentons un schéma reprenant la carte de navigation. Ensuite chaque écran est retranscrit en gardant la même structure : la colonne de gauche pour les pages périphériques et celle de droite pour les pages principales. Chaque page représente un et un seul écran.

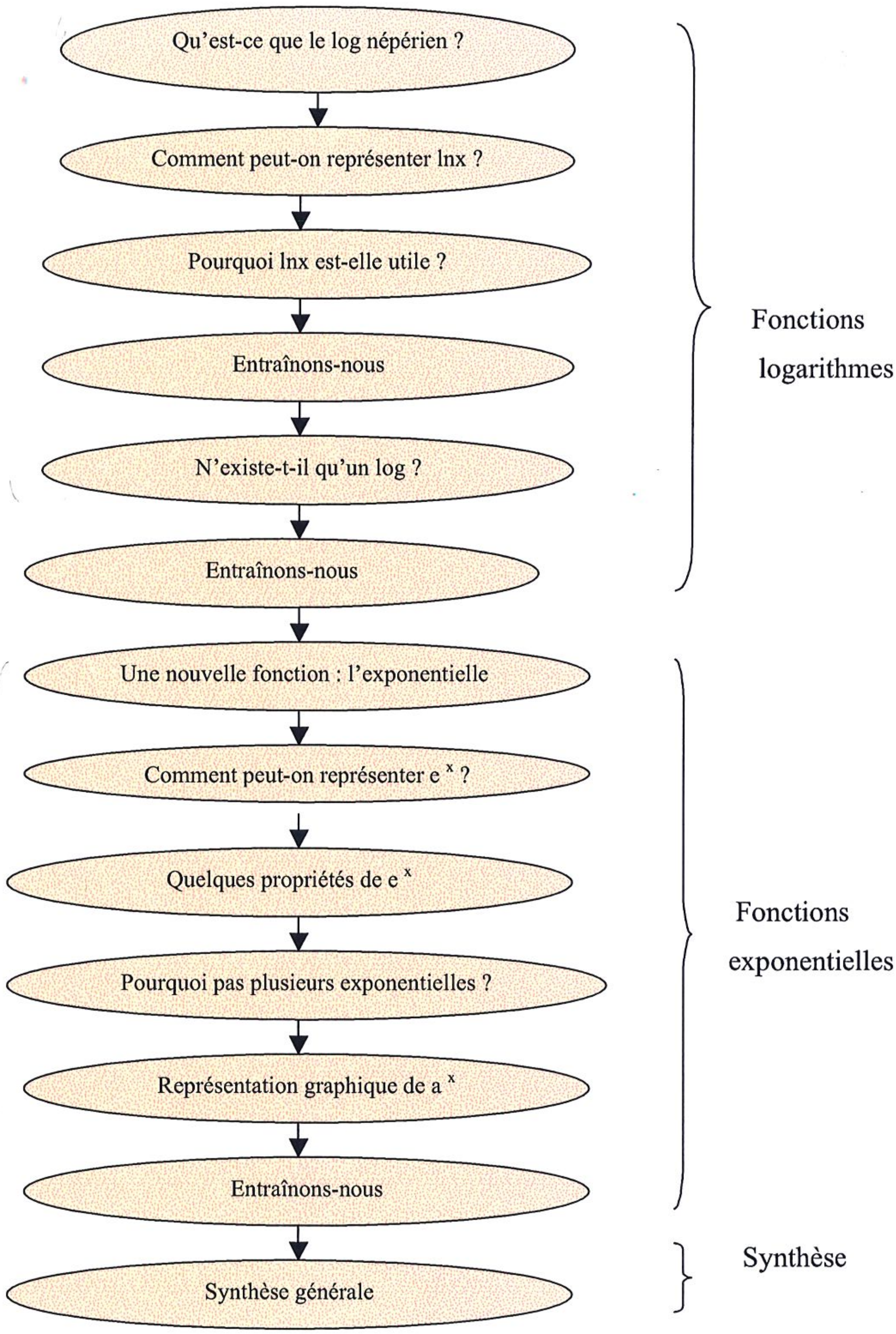
Pour plus de facilité et de compréhension, les icônes sont remplacées par des numéros. Il faut s'imaginer que lorsque l'on clique sur un numéro de la partie de droite, apparaît sur la partie de gauche l'explication correspondante.

Comme chaque page est le fruit de longues réflexions et discussions, nous expliquerons chaque étape de la confection du produit. Pour chaque UA, nous allons présenter les informations structurées comme suit : en premier lieu, nous donnerons une explication générale sur le contenu de l'UA, ensuite figurera la retranscription des écrans et finalement nous proposerons des explications sur les choix didactiques qui ont guidé la confection de cette UA. Les deux premières étapes sont regroupées dans une même rubrique : « contenu et découpages des écrans ».

Pour l'ensemble du produit, plusieurs caractéristiques ont été respectées :

- un caractère d'écriture assez grand
- une attention particulière sur le passage d'un écran à l'autre
- un vocabulaire approprié
- des titres accrocheurs
- des couleurs
- une certaine interpellation
- aller à l'essentiel
- encadrements des concepts importants (définitions, propriétés, …)
- une présentation uniforme

1.La carte de navigation du parcours théorique



2.Qu'est-ce que le logarithme népérien ou naturel ?

Contenu et découpages en écrans

Cette première UA comporte 6 écrans et, comme toute UA, n'étudie qu'un seul concept : la définition du logarithme népérien.

Comme nous avions décidé d'être très attentive à notre public et d'être le plus explicite possible, nous avons opté pour étudier en premier lieu la fonction logarithme népérien plutôt que pour introduire d'emblée les fonctions logarithmes de base a, cette seconde approche nous paraissant plus artificielle.

Qu'est-ce que le logarithme népérien ou naturel ?

Nous allons voir comment la fonction logarithme népérien peut être construite mathématiquement à partir de sa dérivée.

Pour cela, intéressons-nous à la dérivée des puissances de x en nous rappelant que :

- $(x^2)' = 2x$
- $(x^5)' = 5x^4$
- $(x^8)' = 8x^7$

On peut continuer cette démarche avec d'autres exposants mais on remarque aisément que pour des exposants n entiers > 0, on a :

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

Nous pouvons faire de même avec des exposants entiers < 0 et arriver à une conclusion analogue.

En effet :

- $\left(x^{-1}\right)' = -x^{-2}$
- $\left(x^{-3}\right)' = -3x^{-4}$
- $\left(x^{-8}\right)' = -8x^{-9}$

(1)

De plus, pour n=0, nous avons :

$$\left(x^{0}\right)' = 0 \qquad (2)$$

(1) Nous savons tous que si n est un nombre entier > 0,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^{n}}$$

Dès lors, on a par exemple pour n=1 :

$$\left(x^{-1}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^{2}} = -x^{-2}$$

(2) En effet :

$$\left(x^{0}\right)' = 1' = 0$$

car la dérivée d'une constante est nulle

(3) En effet :

si f(x) est une fonction et k une constante,

$$\left(kf(x)\right)' = kf'(x)$$

Nous pouvons donc conclure par la propriété suivante :

Lorsque n est un nombre entier (positif, négatif ou nul),

on a : $$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

Divisons par n les deux membres de cette égalité.

On obtient :

$$x^{n-1} = \frac{1}{n}\left(x^n\right)'$$

Remarquons que cette nouvelle égalité n'est valable que si $n \neq 0$

(car on ne peut pas diviser par 0).

Elle peut encore s'écrire sous la forme :

$$x^{n-1} = \left(\frac{1}{n}x^n\right)' \qquad (3)$$

En posant k = n-1 dans l'égalité précédente ($x^{n-1} = \left(\frac{1}{n}x^n\right)'$), on obtient :

$$x^k = \left(\frac{1}{k+1}x^{k+1}\right)'$$

valable lorsque k est un entier $\neq -1$

On remarque donc que toute puissance (entière) de x, <u>***hormis***</u> x^{-1} est la dérivée d'une autre puissance de x (multipliée par une constante).

Néanmoins, les mathématiciens ont montré que la fonction x^{-1} (pour x>0) est elle aussi la dérivée d'une fonction que nous appelons momentanément F(x).

Nous avons donc $x^{-1} = F'(x)$

Remarquons que si nous ajoutons une constante à F(x), nous obtenons toujours :

$$x^{-1} = \left(F(x) + k\right)' \qquad (4)$$

Il y a donc une infinité de fonctions dont la dérivée vaut x^{-1} puisque l'on peut donner à k toutes les valeurs possibles.

(4) En effet :

$$\left(F(x) + k\right)' = F'(x) + k' = F'(x) + 0$$

Nous allons choisir parmi toutes ces fonctions celle qui s'annule pour $x=1$

et nous l'appellerons *«logarithme népérien ou naturel de x »*.

On notera cette fonction « lnx ».

En résumé, on a donc :

- lnx est défini pour tous les $x>0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $\ln 1 = 0$

Discussions

Nous avons fait le choix d'utiliser dans le titre les deux termes définissant un logarithme de base e : népérien et naturel. En effet, si le premier titre est déjà composé d'un mot que l'utilisateur ne connaît pas, il risque de se décourager et de ne pas poursuivre le parcours.

La plupart des manuels mathématiques définissent la fonction logarithme népérien à partir des primitives. Le terme « primitive » n'est certainement plus connu de tous les étudiants auxquels nous nous adressons. Cependant, il nous semblait trop coûteux et non indispensable de proposer des rappels exhaustifs sur ce concept.

Nous avons alors procédé de la façon suivante : tout d'abord nous proposons un court rappel sur les dérivées des puissances de x (pour des exposants entiers positifs, négatifs et nuls) et ensuite, par manipulation de la formule générale des dérivées des fonctions puissances, nous observons que toute puissance de x, hormis x^{-1}, est la dérivée d'une autre puissance de x.
Nous avons alors défini la fonction logarithme népérien comme étant la fonction dont la dérivée vaut 1/x. Nous avons donc défini cette nouvelle fonction sans jamais utiliser explicitement le terme « primitive », mais bien sûr, ceci a pour conséquence que toute considération sur l'existence de cette fonction est exclue du discours.

Les pages périphériques sont composées de quelques propriétés que l'utilisateur a certainement déjà rencontrées. Elles sont rappelées afin que chaque étape du développement des dérivées et de la définition de la fonction « logarithme népérien » soit le plus clair possible.

Nous avons terminé cette UA en présentant un résumé de la définition. Nous estimons que ce résumé est ce que l'apprenant doit avoir retenu à la fin de l'UA : il a donc été encadré.

3.Comment peut-on représenter la fonction lnx ?

Contenu et découpages en écrans

Cette UA comporte 3 écrans et développe la représentation graphique de la fonction logarithme népérien.

Cette UA utilise immédiatement toutes les propriétés figurant dans la synthèse présentée au dernier écran de l'UA précédente. Il est donc logique qu'elle lui succède.

Une façon commode d'étudier le graphe de la fonction est de se baser sur les primitives et intégrales. Comme nous n'avons pas souhaité utiliser ces concepts pour définir la fonction lnx, nous avons dû adapter certains développements pour ne pas non plus les utiliser dans cette UA.

L'objectif poursuivi dans cette UA est de bien montrer l'allure du graphe de lnx, c'est-à-dire de faire percevoir à l'apprenant que la fonction augmente très vite au début et ensuite se stabilise. Les biologistes se basent très souvent sur les graphes lors de leurs recherches.

Comment peut-on représenter la fonction lnx ?

Nous savons déjà, par la définition de la fonction lnx, que :

- lnx est définie pour tous les $x > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $\ln 1 = 0$

Ces trois résultats nous donnent des informations sur l'allure du graphe de lnx :

- la fonction lnx est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ car $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $x > 0$ (5)
- le graphe de lnx a une concavité tournée vers le bas (vers les $y < 0$)

car $(\ln x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} < 0$ (6)

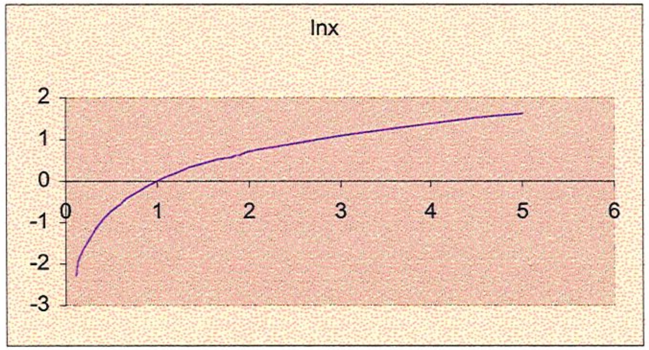
(5) En effet, nous savons que, pour toute fonction f admettant une dérivée sur un intervalle [a,b],

- Si $f'(x) > 0$ pour $x \in [a,b]$ alors f est strictement croissante sur [a,b]
- Si $f'(x) < 0$ pour $x \in [a,b]$ alors f est strictement décroissante sur [a,b]

(6) Pour étudier la concavité d'un graphe, il faut calculer la dérivée seconde de la fonction.

- Si $f''(x) < 0$ pour $x \in [a,b]$ alors la concavité du graphe est tournée vers le bas sur [a,b]
- Si $f''(x) > 0$ pour $x \in [a,b]$ alors la concavité du graphe est tournée vers le haut sur [a,b]

En réalité, les mathématiciens ont montré que le graphe de la fonction lnx était le suivant :



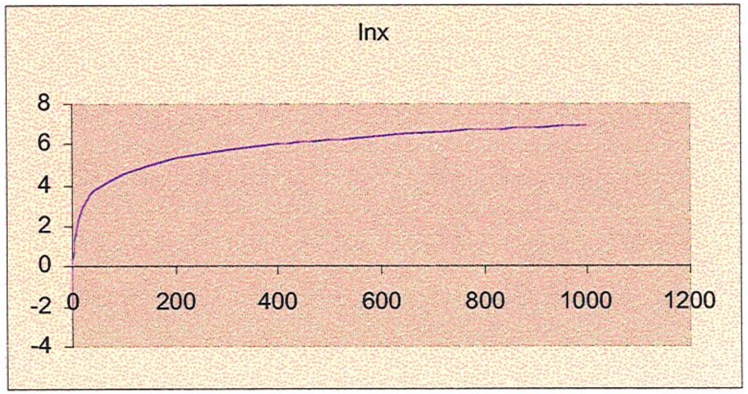
Nous pouvons définir un nombre spécial, le nombre positif e caractérisé par :

$$\ln e = 1$$

Les mathématiciens en ont calculé une valeur approchée :

$$e = 2.7182\ldots$$

On peut voir, en dessinant le graphe de lnx avec une échelle plus petite que la courbe est de plus en plus « plate » au fur et à mesure que x augmente.



Discussions

Comme cette UA utilise la définition de la fonction lnx, le premier écran débute par une reprise de cette définition de manière à l'avoir sous les yeux.
En effet, nous calculons la dérivée première et seconde pour en déduire l'allure générale du graphe.

Nous déduisons du calcul des dérivées premières et secondes l'allure du graphe sur l'intervalle]0,+∞[. Ensuite, comme nous ne monopolisons que les connaissances de base que tout étudiant sortant du secondaire est capable de retrouver, nous évitons de donner des explications sur le calcul des limites.

On définit aussi le nombre « e » qui sera utilisé dans la suite du cours.

Un premier graphe porte sur le domaine]0,5] et nous avons voulu terminer l'UA en proposant un second graphe portant sur]0,1000] pour insister sur l'allure de celui-ci.

Les deux seuls concepts importants à rappeler dans les pages périphériques sont les liens existant entre :

- la dérivée première d'une fonction et sa croissance ou décroissance
- la dérivée seconde d'une fonction et la concavité de son graphe.

En effet, ces concepts, très utiles pour la compréhension de notre exposé, sont peut-être oubliés par certains étudiants.

4.Pourquoi la fonction « lnx » est – elle utile ?

Contenu et découpages en écrans

Les principales propriétés étudiées portent sur le logarithme d'un produit, d'un quotient, d'une puissance rationnelle ainsi que sur le caractère bijectif du logarithme.
C'est l'objet de la présente UA qui comporte 5 écrans.

(7) <u>Preuve</u>:

- Nous savons grâce au théorème de dérivation des fonctions composées que si k est une constante > 0, nous avons pour x > 0:

$$(\ln kx)' = \frac{1}{kx}(kx)' = \frac{1}{kx}k = \frac{1}{x}$$

- Nous savons aussi que $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

- Les deux fonctions $\ln x$ et $\ln(kx)$ ont donc la même dérivée et par conséquent elles diffèrent par une constante.

On a donc l'égalité suivante, valable pour tout x>0 :

$$\ln(kx) - \ln x = C \qquad (C = \text{ constante}) \ (\blacklozenge)$$

En écrivant cette égalité pour x=1, nous obtenons

$$\ln k - \ln 1 = C$$

c'est-à-dire $\qquad C = \ln k$.

<u>Pourquoi la fonction « lnx » est-elle utile ?</u>

Nous allons voir que la fonction lnx possède quelques propriétés très intéressantes qui rendent les manipulations des fonctions logarithmiques faciles. C'est pour toutes ces propriétés que la fonction lnx est très fréquemment utilisée dans divers domaines.

- Pour tous les nombres x > 0 et y > 0 :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad (7)$$

Faites l'expérience suivante : recherchez à l'aide de votre calculatrice les valeurs de ln2 et ln3. Vous obtenez ln2=0,6931 et ln3=1,0986. Vous pouvez alors immédiatement calculer ln6. En effet, ln6 = ln(2x3) = ln2 + ln3. Vous pouvez vérifier ce résultat sur votre calculatrice.

L'égalité (◆) devient donc

$$\ln(kx) - \ln x = \ln k$$

ou encore $\ln(kx) = \ln k + \ln x$

Ceci montre que le logarithme népérien d'un produit de deux nombres >0 est égal à la somme des logarithmes népériens de ces deux nombres.

(8) <u>Preuve :</u>

Pour démontrer cette propriété, nous allons utiliser la propriété précédente.

L'égalité suivante est immédiate :

$$x = \frac{x}{y} y .$$

Nous avons alors pour x et y > 0 :

$$\ln x = \ln\left(\frac{x}{y} y\right) = \ln\frac{x}{y} + \ln y$$

ou encore $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

- Pour tous les nombres x > 0 et y > 0 :

$$\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y \qquad (8)$$

De même que pour la propriété précédente, si vous recherchez sur votre calculatrice les valeurs de ln2 et ln3, vous pouvez calculer $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ ou $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

En effet $\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 - \ln 3 = 0{,}6931 - 1{,}0986 = -0{,}4055$

et $\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 3 - \ln 2 = 1{,}0986 - 0{,}6931 = 0{,}4055$.

Vous pouvez également vérifier ces résultats sur votre calculatrice.

(9) Nous allons vérifier cette propriété pour quelques valeurs de l'exposant r.

- $\ln\left(x^5\right) = \ln(x.x.x.x.x)$

$$= \ln x + \ln x + \ln x + \ln x + \ln x$$

$$= 5\ln x$$

- $\ln\left(x^{-3}\right) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$$= \ln\left(\frac{1}{x}.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 3\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 3\ln\left(x^{-1}\right) = -3\ln x$$

- soit $y = x^{\frac{5}{3}}$

$$y = x^{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow y^3 = x^5$$

$$\Leftrightarrow \ln y^3 = \ln x^5$$

$$\Leftrightarrow 3\ln y = 5\ln x \Leftrightarrow \ln y = \frac{5}{3}\ln x$$

- Pour tout nombre $x > 0$:

$$\ln\left(x^r\right) = r\ln x \qquad (9)$$

où r peut être un nombre entier positif, négatif ou nul,

mais aussi un quotient de deux nombres entiers.

Voyons maintenant comment cette propriété permet de calculer des valeurs du logarithme népérien.

Il suffit de connaître, par exemple, ln10 pour calculer le logarithme népérien de toutes les puissances de 10.

- $\ln(10.000.000.000.000.000) = \ln 10^{16} = 16(\ln 10) = 36{,}841\ldots$
- $\ln(0{,}0000000001) = \ln(10^{-10}) = -10(\ln 10) = -23{,}025\ldots$

L'observation du graphe de $\ln x$ montre que si deux nombres sont égaux, ils ont le même logarithme népérien et réciproquement, ce que nous résumons par :

- Si $x > 0$ et $y > 0$ alors

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

Cette propriété est très utile pour résoudre des équations faisant intervenir la fonction ln. En voici quelques exemples.

Exemple 1 : **$\ln(2x) = \ln(5x - 2)$**

On a vu que $\ln x$ n'est défini que pour $x > 0$. Il faut donc commencer par imposer les conditions suivantes :

- $2x > 0$ c'est-à-dire $x > 0$
- $5x-2 > 0$ c'est-à-dire $x > 2/5$

Ces deux inégalités ($x > 0$ et $x > 2/5$) devant être vérifiées simultanément,

on retiendra donc que $x > 2/5$.

Ensuite : $\ln 2x = \ln(5x-2) \Leftrightarrow 2x = 5x - 2$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Cette solution est acceptée car elle est plus grande que 2/5.

<u>Exemple 2</u> : **ln4 = 2 lnx**

La seule condition à imposer est : $x > 0$.

Ensuite : $\ln 4 = 2 \ln x \Leftrightarrow \ln 4 = \ln x^2$

$$\Leftrightarrow 4 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

Comme x doit être strictement positif, on ne garde que la solution

$x = 2$.

Discussions

On a donc donné dans cette UA quatre propriétés que les biologistes utilisent très fréquemment.
Chaque propriété est démontrée dans les pages périphériques. La preuve de la deuxième propriété ($\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$) utilise la première propriété ($\ln(xy) = \ln x + \ln y$) donc l'ordre des propriétés a une certaine importance. Chaque démonstration est expliquée le plus clairement possible.

De plus, nous attirons l'attention sur l'utilité de chaque propriété grâce à un exemple adapté. Chaque exemple montre que les propriétés facilitent les calculs.
L'exemple consacré à la troisième propriété ($\ln\left(x^r\right) = r \ln x$) montre que pour des valeurs qui sont trop grandes pour la calculatrice, on peut malgré tout en calculer le logarithme népérien grâce à la propriété.

La dernière propriété ($\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$) est illustrée par deux exemples. Le second de ces exemples est présenté dans le but de montrer que les conditions d'existence sont indispensables.

Les 4 propriétés sont rédigées avec la même structure, en utilisant les mêmes notations afin que les étudiants aient une bonne vue d'ensemble. De plus, nous avons veillé à présenter sur le même écran une propriété et les exemples qui lui correspondent.

Comme nous manquions de place pour retranscrire la preuve de la première propriété dans ce manuscrit, nous avons empiété sur la page suivante. Par contre, dans les pages web, cette preuve occupe un seul écran.

5.Entraînons-nous.

Contenu et découpages en écrans

Cette UA est composée de 6 écrans.

Comme notre projet est un outil d'auto apprentissage interactif, il faut permettre à l'apprenant de tester ses connaissances. Comme, à ce niveau-ci, nous avons proposé toute la théorie concernant la fonction logarithme népérien, il est temps que l'apprenant s'évalue sur cette matière avec une série d'exercices.

Ces exercices ont été recherchés afin qu'ils soient accessibles, pas trop faciles ni trop difficiles. En effet, il faut à tout moment, dans un outil interactif, attirer, retenir l'étudiant afin qu'il poursuive le parcours.
Les exercices sont calqués sur les exemples rencontrés lors des UA précédentes.

De plus, tous les énoncés ont été rédigés dans l'optique qu'ils soient utiles pour notre public lors de leurs recherches et leurs expériences.

Comme notre projet est un outil interactif, l'apprenant doit pouvoir se contrôler lui-même grâce à un corrigé.

(10) $\ln 20 = \ln(2x10) = \ln 2 + \ln 10$

$= 0.6931 + 2.3026$

$= 2.9957$

(11) $\ln(100) = \ln(10^2)$

$= 2\ln 10$

$= 4.6052$

(12) $\ln 900 = \ln(30^2)$

$= 2\ln(10x3)$

$= 2(\ln 10 + \ln 3)$

$= 6.8024$

(13) $\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$

$= -1.0986$

Entraînons-nous

1) En utilisant uniquement les données suivantes :

$\ln 2 = 0.6931$
$\ln 10 = 2.3026$
$\ln 3 = 1.0986$

calculez

* $\ln 20$ (10)
* $\ln 100$ (11)
* $\ln 900$ (12)
* $\ln\frac{1}{3}$ (13)

(14) $\ln 60 = \ln(2x3x10)$

$= \ln 2 + \ln 3 + \ln 10$

$= 4.0943$

(15) $\ln$ (3 milliards) $= \ln(3x10^9)$

$= \ln 3 + \ln(10^9)$

$= \ln 3 + 9 \ln 10$

$= 1.0986 + (9x2.3026)$

$= 21.822$

(16) $\ln(0.00000000001) = \ln(10^{-11})$

$= -11(\ln 10)$

$= -11.(2.3026)$

$= -25.3286$

(17) $\ln(0.000000003) = \ln(3x10^{-9})$

$= \ln 3 + \ln(10^{-9})$

$= \ln 3 + (-9) \ln 10$

$= -19.6248$

* $\ln 60$ (14)
* ln(3 milliards) (15)
* ln(0,00000000001) (16)
* ln(0,000000003) (17)

(18) Il faut d'abord vérifier que les arguments de ln sont >0, c'est-à-dire que 3x+1>0, ou encore x>-1/3.

$$\ln(3x+1)=\ln 2 \Leftrightarrow 3x+1=2$$

$$\Leftrightarrow 3x=1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

La solution est donc $x=\frac{1}{3}$

(19) Ici la seule condition est :

$\frac{x}{3}>0$ ou encore $x>0$

$$4\ln 3=\ln 81-2\ln\frac{x}{3} \Leftrightarrow \ln 3^4=\ln 81-2\ln\frac{x}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ln 81=\ln 81-\ln\frac{x^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow 0=\ln\frac{x^2}{9} \Leftrightarrow \ln 1=\ln\frac{x^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{x^2}{9} \Leftrightarrow x^2=9$$

2) Résolvez les équations suivantes :

$* \ln(3x+1)=\ln 2$ (18)

$* \quad 4\ln 3=\ln 81-2\ln\frac{x}{3}$ (19)

x peut donc prendre 2 valeurs qui sont 3 et –3

or x>0 par les conditions.

La seule solution est donc 3.

(20) Les conditions sont : 1+x>0 et 1-x>0

$$\ln(1+x)=1+\ln(1-x) \Leftrightarrow \ln(1+x)-\ln(1-x)=1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=1=\ln e$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x}=e$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{e-1}{e+1}$$

$$* \ln(1+x)=1+\ln(1-x) \qquad (20)$$

(21) La condition est :

$$1+x^2>0 \qquad \text{c'est-à-dire}$$

$x^2>-1$ ce qui est toujours vrai

$$\ln\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+x^2\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 1+x^2=e$$

On a alors deux solutions :

$\sqrt{e-1}$ et $-\sqrt{e-1}$

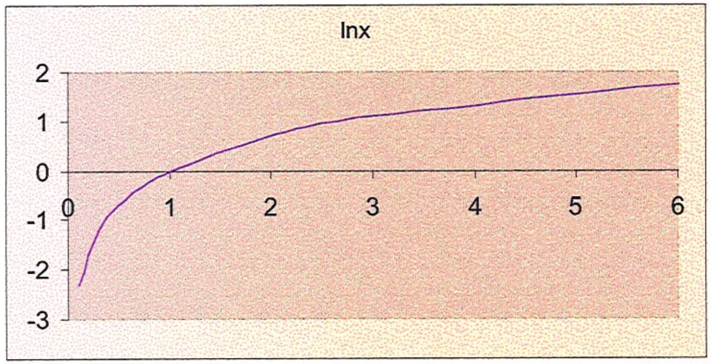
* $\ln\sqrt{1+x^2}=\dfrac{1}{2}$ (21)

3)Dessinez le graphe de « y = lnx » et déduisez-en les valeurs de x pour lesquelles

* $\ln x > 0$
* $\ln x = 0$
* $\ln x < 0$

(22)

(22)



On voit que
- $\ln x > 0$ lorsque $x > 1$
- $\ln x < 0$ lorsque $0 < x < 1$
- $\ln x = 0$ lorsque $x = 1$

Discussions

Cette série d'évaluation comporte 3 types d'exercices différents.

Avec le premier exercice, l'apprenant pourra tester ses connaissances des trois premières propriétés de la fonction logarithme népérien ($\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ et $\ln\left(x^r\right) = r\ln x$).

Les premiers énoncés sont une application directe, calqués sur les exemples décrits précédemment, pour qu'il puisse s'entraîner. Les derniers énoncés sont plus difficiles mais plus adaptés aux utilisations des biologistes. Il y a donc une progression dans la difficulté des exercices.

Après chaque énoncé, l'étudiant pourra vérifier sa réponse en cliquant sur l'icône correspondante. Les solutions apparaissent sur la partie gauche de l'écran réservée aux pages périphériques. Comme les énoncés sont proposés dans un ordre croissant de difficulté, il nous semblait plus intéressant que l'apprenant vérifie sa réponse après chaque énoncé plutôt que d'attendre la fin de l'exercice pour le faire.

Comme l'apprenant doit se corriger seul, nous avons estimé important de lui fournir un développement complet de chaque réponse afin qu'il comprenne bien et puisse voir à quel moment il a fait une erreur si sa réponse est incorrecte.

Le deuxième exercice proposé est une résolution d'équations. Cet exercice permet de contrôler la connaissance de la quatrième propriété de la fonction logarithme népérien ($\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$). De même que pour le premier exercice, l'élève peut vérifier sa réponse après chaque énoncé avec un corrigé le plus complet possible.

Le troisième exercice est un test plus théorique. En effet, on demande à l'étudiant de déduire de ses connaissances quelques propriétés de la fonction lnx.

Ces trois exercices permettent à l'apprenant de voir son niveau de connaissances. Ce test est un test d'autocontrôle. L'élève n'est pas obligé de le faire ni de le réussir pour continuer l'exposé. Nous estimons que l'utilisateur est libre de ses choix et doit se rendre compte par lui-même s'il n'a pas compris et qu'il est plus judicieux pour lui de retourner en arrière dans l'exposé.

En effet, ces trois exercices testent les concepts les plus importants de la fonction logarithme népérien : sa définition, ses propriétés et son graphe.

6.N'existe-t-il qu'un logarithme ?

Contenu et découpages en écrans

Après avoir présenté tous les concepts sur le logarithme népérien, deux choix se posaient à nous. Le premier choix était de généraliser la fonction logarithme népérien aux fonctions logarithmes de base quelconque. Le second choix était de passer de la fonction logarithme népérien à la fonction exponentielle.

Nous avons choisi la première solution car il nous semblait plus intéressant et plus facile pour l'étudiant de voir d'abord toutes les fonctions logarithmes (en base e et en base quelconque) et ensuite entreprendre l'étude des fonctions exponentielles.

Cette UA étudie donc les fonctions logarithmes en base quelconque et est composée de 3 écrans.

N'existe-t-il qu'un logarithme ?

Nous venons d'étudier le logarithme népérien (naturel).

Mais il existe d'autres logarithmes.

Nous pouvons définir le logarithme en base a de x (a est une constante>0, $a \neq 1$ et $x > 0$) comme le nombre réel noté $\log_a x$ tel que :

$$\boxed{\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x}$$

(On voit donc que le logarithme en base a est simplement le logarithme népérien multiplié par la constante 1/lna)

L'expression $\log_a x = \frac{1}{\ln a}\ln x$ étant valable pour toute base

$a \neq 1$, $a > 0$ nous pouvons considérer le cas où $a = e$.

Nous obtenons :

$$\log_e x = \frac{1}{\ln e}\ln x = \ln x$$

Ceci montre que le logarithme népérien n'est rien d'autre que le logarithme en base e.

Les logarithmes les plus utilisés dans les disciplines scientifiques sont le logarithme en base 10, appelé *logarithme décimal* et le logarithme en base e (ln).

Puisque le logarithme en base a est égal au logarithme népérien multiplié par la constante 1/lna, les propriétés de ln sont encore valables pour le log en base a.

Pour tout x > 0, y > 0 et a une constante > 0, ≠ 1 :

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (23)
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^q) = q\log_a x$
- $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

où q est un nombre entier positif, négatif, nul ou un quotient de deux nombres entiers

(23) En effet :

$$\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y$$

Discussions

En lisant le titre de cette UA, l'élève s'imagine qu'il y a d'autres logarithmes et nous espérons qu'il souhaitera les découvrir.
Comme nous venons de le dire en introduction, nous avons préféré, après avoir étudié la fonction logarithme népérien, entamer l'étude des fonctions logarithmes en base quelconque. Ce choix est dû, en partie, au fait que le logarithme en base a est défini à partir du logarithme népérien.

Nous faisons remarquer à l'apprenant que le logarithme en base e est simplement le logarithme népérien. Cette remarque peut sembler inutile mais nous pensons que beaucoup d'étudiants ne retiennent que ce qu'on leur dit et ne cherchent pas plus loin des explications.

Nous insistons aussi sur le logarithme en base 10 qui est le logarithme le plus utilisé en biologie.
Dans une production didactique de ce type, il ne suffit pas de transmettre des concepts, il faut insister sur le fait que l'apprenant s'en servira et en donner des exemples.

Nous terminons par donner quelques propriétés sur le logarithme en base a qui découlent directement de la définition du logarithme en base a en fonction du logarithme népérien et des propriétés du logarithme népérien.

Seule la première des propriétés est démontrée en périphérique car les autres propriétés suivent exactement la même démarche.

Il faut ajouter aussi que toutes ces propriétés sont rassemblées sur un même écran pour plus de facilité pour l'élève.

La formule des changements de base n'est pas reprise car le plus important pour les biologistes est la conversion d'un logarithme de base a en un logarithme népérien et non d'un logarithme de base a en un logarithme de base b.

7.Entraînons-nous

Contenu et découpages en écrans

Cette UA est composée de 2 écrans et teste les connaissances sur les fonctions logarithmes en base quelconque.

Comme pour chaque séance d'exercices, les corrigés complets des exercices sont proposés en pages périphériques.

Entraînons-nous.

En utilisant uniquement les données suivantes :

$\ln 2 = 0.6931$

$\ln 5 = 1.6094$

calculez

* $\log_5 10$ (24)
* $\log_5 8$ (25)
* $\log_2 1000$ (26)

(24) $\log_5 10 = \log_5 (2 x 5)$

$$= \log_5 2 + \log_5 5$$

$$= \frac{\ln 2}{\ln 5} + \frac{\ln 5}{\ln 5}$$

$$= \frac{0.6931}{1.6094} + 1$$

$$= 1.4306$$

(25) $\log_5 8 = \log_5 2^3$

$$= 3\log_5 2$$

$$= 3 \text{ x } 0.4306$$

$$= 1.2918$$

(26) $\log_2 1000 = \log_2 (125 x 8)$

$$= \log_2 (5^3 x 2^3)$$

$$= \log_2 5^3 + \log_2 2^3$$

$$= 3\log_2 5 + 3\log_2 2$$

$$= 3\frac{\ln 5}{\ln 2} + 3\frac{\ln 2}{\ln 2}$$

$$= 9.9661$$

(27) $\log_5 1000000000 = \log_5 10^9$

$$= 9\log_5 10$$

$$= 9(\log_5 2 + \log_5 5)$$

$$= 9(\frac{\ln 2}{\ln 5} + \frac{\ln 5}{\ln 5})$$

$$=9(0.4306+1)$$

$$=12.8754$$

* $\log_5 1000000000$ (27)

Discussions

Nous proposons un exercice sur les fonctions logarithmes en base quelconque qui permet d'utiliser la définition de la fonction logarithme de base quelconque et ses propriétés.

De même que pour les exercices sur la fonction logarithme népérien, l'utilisateur peut cliquer après chaque énoncé afin d'avoir une réponse complète.

Le dernier énoncé montre qu'il est possible de calculer le logarithme en base a de nombres très grands qu'il est impossible de trouver à l'aide d'une calculatrice

8.Une nouvelle fonction : la fonction exponentielle e^x.

Contenu et découpages en écrans

A ce niveau, nous avons fait le tour de l'étude des fonctions logarithmes. Nous pouvons alors débuter l'apprentissage des fonctions exponentielles. Cet apprentissage se fera en deux parties. La première partie est réservée à la fonction exponentielle de base e et la deuxième partie est consacrée aux fonctions exponentielles de base a.

Cette UA étudie donc la fonction exponentielle de base e et est composée d'1 écran.

Une nouvelle fonction : la fonction exponentielle.

Les mathématiciens ont montré que la fonction logarithme népérien, grâce à ses propriétés, admet une fonction réciproque : (28)

la *fonction exponentielle* notée e^x .

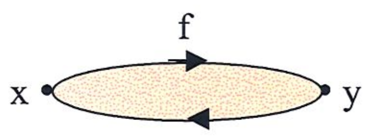
Pour x un nombre réel

$$y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$$

Remarquons que la fonction exponentielle existe pour n'importe quelle valeur de x.

(28) Définition de fonction réciproque.

La *réciproque* de la fonction f , définie par y=f(x), est la fonction qui fait correspondre à chaque y obtenu par f, le x dont il est l'image.



g=réciproque de f

On a donc :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

Discussions

Nous définissons dans cette UA une nouvelle fonction : la fonction exponentielle e^x. Cette fonction est définie à partir de la fonction logarithme népérien. L'élève doit admettre que, grâce à ses propriétés, la fonction logarithme népérien admet une fonction réciproque : la fonction exponentielle e^x. En effet, pour ne pas alourdir l'exposé, nous avons évité de présenter les détails démontrant l'existence d'une fonction réciproque.

Par contre, il était important d'éclaircir en pages périphériques la définition d'une fonction réciproque. Nous l'avons défini de façon simple, en utilisant un schéma assez explicite.

9. Comment peut-on représenter graphiquement e^x ?

Contenu et découpages en écrans

Nous avons gardé, pour étudier la fonction exponentielle e^x, la même structure que lors de l'étude de la fonction logarithme népérien, c'est-à-dire que nous débutons par la définition de la fonction pour ensuite passer à sa représentation graphique et finalement présenter ses propriétés.

L'UA précédente était consacrée à la définition de la fonction exponentielle e^x. Nous avons donc réservé cette UA, composée de 2 écrans, à la représentation graphique de cette fonction.

Comment peut-on représenter graphiquement e^x ?

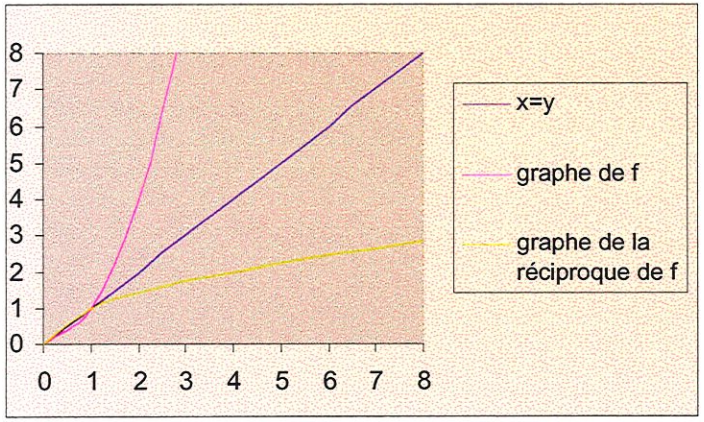
Nous avons vu que la fonction exponentielle e^x est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Nous pouvons donc représenter graphiquement la fonction exponentielle e^x à partir du graphe de la fonction logarithme népérien. (29)

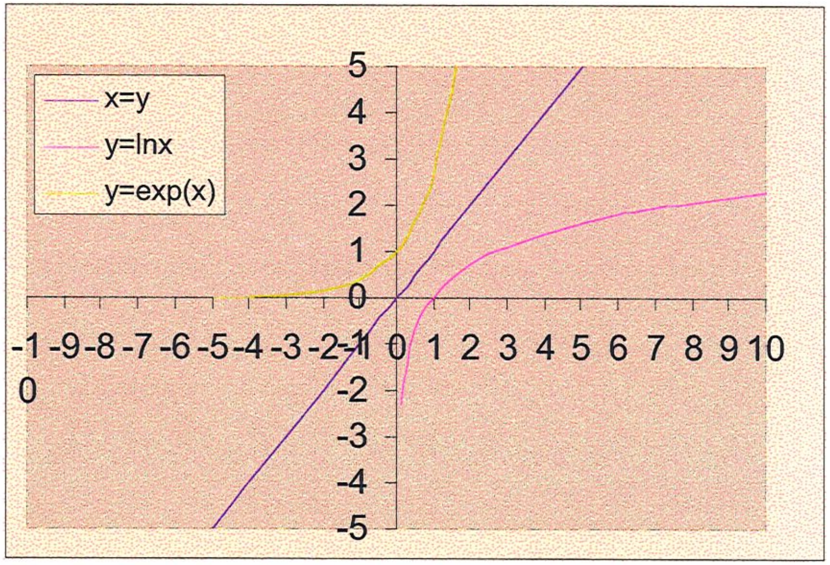
(29) En effet, les graphes de 2 fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire la droite d'équation x=y).

Exemple de graphes de 2 fonctions réciproques :

- $f(x) = x^2$
- réciproque de $f(x) = \sqrt{x}$



Voici donc l'allure des graphes de « $y = \ln x$ » et « $y = e^x = \exp(x)$ » :



On remarque que : • la fonction exponentielle e^x est croissante

• son graphe a une concavité tournée vers le haut

(vers les $y > 0$)

• $e^x > 0$ pour tout nombre réel x

Discussions

Le plus facile et le plus efficace pour représenter la fonction exponentielle e^x est de profiter des propriétés des fonctions réciproques. En effet, nous rappelons en périphérique la propriété des graphes de deux fonctions réciproques et nous en donnons un exemple simple pour les fonctions x^2 et $\sqrt{x}$.

Nous appliquons alors cette propriété aux deux fonctions réciproques : la fonction logarithme népérien et la fonction exponentielle e^x. Comme nous connaissons déjà le graphe de la fonction logarithme népérien, il suffit alors de dessiner un graphe symétrique de celui-ci par rapport à la première bissectrice.

Nous avons finalement deux graphes reprenant les deux fonctions : $\ln x$ et e^x. On déduit de ces graphes plusieurs caractéristiques de la fonction exponentielle e^x (croissance, concavité tournée vers le haut).

Cette façon de représenter la fonction est peut-être assez coûteuse en rappels (fonctions réciproques) mais est très efficace et permet ainsi de bien voir les relations entre les deux fonctions.

10.Quelques propriétés de la fonction exponentielle e^x

Contenu et découpages en écrans

Nous poursuivons notre exposé en présentant les propriétés de la fonction exponentielle e^x. Ces propriétés sont reprises dans une même UA, composée de 3 écrans, et terminent l'étude de la fonction exponentielle de base e.

(30) $e^0 = y \Leftrightarrow \ln e^0 = \ln y$

$\Leftrightarrow 0 = \ln y$

$\Leftrightarrow y = 1$

(31) Preuve :

- $e^x = \alpha \Leftrightarrow x = \ln \alpha$
- $e^y = \beta \Leftrightarrow y = \ln \beta$
- $e^{x+y} = \gamma \Leftrightarrow x + y = \ln \gamma$

On a alors : $x + y = \ln \gamma$

$= \ln \alpha + \ln \beta$

$= \ln(\alpha.\beta)$

Puisque $\ln \gamma = \ln(\alpha.\beta)$,

on a donc : $\gamma = \alpha.\beta$,

ce qui peut s'écrire:

$$e^{x+y} = \gamma = \alpha.\beta = e^x.e^y$$

Quelques propriétés de la fonction exponentielle e^x.

Comme la fonction logarithme népérien, la fonction exponentielle présente des propriétés très utiles.

- Pour tous les nombres x et y réels :

$$e^0 = 1 \qquad (30)$$

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad (31)$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad (32)$$

(32) <u>Preuve :</u>

- $e^x = \alpha \Leftrightarrow x = \ln\alpha$
- $e^y = \beta \Leftrightarrow y = \ln\beta$
- $e^{x-y} = \gamma \Leftrightarrow x - y = \ln\gamma$

On a alors : $x - y = \ln\gamma$

$$= \ln\alpha - \ln\beta$$

$$= \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Puisque $\ln\gamma = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$,

on a donc : $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$,

ce qui peut s'écrire:

$$e^{x-y} = \gamma = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{e^x}{e^y}$$

De plus :

- Pour tous les nombres x réels :

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

Discussions

Dans cette UA, nous exposons les 5 propriétés de la fonction exponentielle les plus utilisées.

Les trois premières propriétés ($e^0 = 1$; $e^{x+y} = e^x e^y$; $e^{x-y} = e^x/e^y$) se trouvent sur un même écran afin que l'utilisateur ait une bonne vue d'ensemble. Toutes ces propriétés suivent la même structure que les propriétés du logarithme népérien. Ces propriétés sont démontrées le plus clairement possible en périphérique.

Les deux dernières propriétés qui sont proposées ne sont qu'une simple déduction de la définition des fonctions réciproques. Il nous semblait inutile de démontrer ces deux propriétés en périphérique.

11.Si plusieurs fonctions logarithmes, pourquoi pas plusieurs fonctions exponentielles ?

Contenu et découpages en écrans

Nous débutons ici la deuxième partie de l'étude des fonctions exponentielles, c'est-à-dire que nous entamons l'apprentissage des fonctions exponentielles de base quelconque.

Cette UA étudie la définition et les propriétés des fonctions exponentielles de base quelconque et est composée de 3 écrans.

(33) Que vaut 1^x ?

Nous savons que

$$y = a^x \Leftrightarrow x \ln a = \ln y$$

Si nous prenons comme base a = 1, nous obtenons : $y = 1^x \Leftrightarrow x \ln 1 = \ln y$

ou encore : $y = 1^x \Leftrightarrow 0 = \ln y$

c'est-à-dire : $y = 1^x \Leftrightarrow y = 1$.

Cela veut dire que $y = a^x$ est aussi valable pour la base a = 1 et que $1^x = 1$ pour tous les nombres réels x.

Si plusieurs fonctions logarithmes, pourquoi pas plusieurs fonctions exponentielles ?

Nous avons dit que la fonction e^x est la fonction réciproque de la fonction lnx.

De même, nous pouvons dire que la fonction a^x est la fonction réciproque de la fonction $\log_a x$ (où a est une constante > 0, $\neq 1$).

Cette fonction est appelée exponentielle en base a.

On a donc :

Pour tous les nombres réels x et y (y>0), et pour a une constante > 0, $\neq 1$

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y \qquad (33)$$

Les propriétés de la fonction a^x sont les mêmes que celles de e^x. (34)

Pour tous les nombres x et y et pour tout a > 0 , $\neq 1$

- $a^0 = 1$
- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

La fonction a^x présente une propriété supplémentaire :

Pour tous les nombres x et y et pour tout a, b > 0, $\neq 1$

- $(ab)^x = a^x b^x$

(34)

Pour tous les nombres x et y réels :

$$e^0 = 1$$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

De plus, toute fonction a^x peut s'exprimer au moyen de e^x :

Pour tout nombre réel x et pour a>0 :

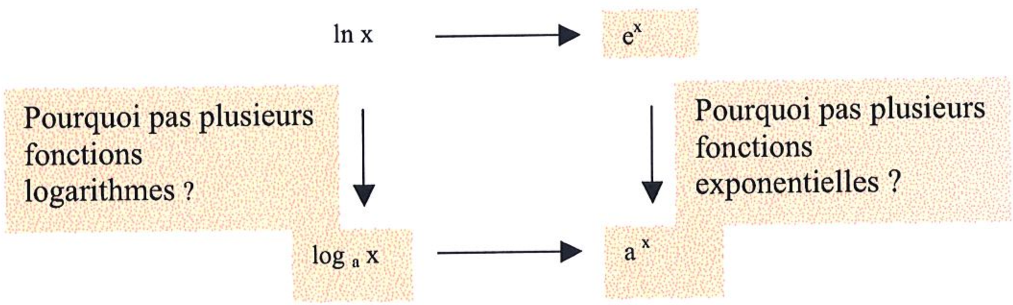
$$a^x = e^{x \ln a}$$

<u>Exemple</u> : $2^x = e^{x \ln 2} = e^{0.693...x}$.

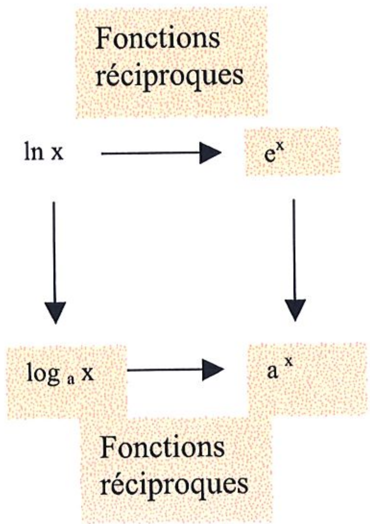
Discussions

Nous avons gardé la même structure pour passer de la fonction exponentielle e^x aux fonctions exponentielles en base quelconque que lors du passage de la fonction logarithme népérien aux fonctions logarithmes en base a.

Ces passages sont représentés dans le schéma suivant :



De même, nous avons gardé les mêmes propriétés pour passer des fonctions logarithmes en base a aux fonctions exponentielles en base a que lors du passage de la fonction logarithme népérien à la fonction exponentielle e^x.



Nous avons donc défini la fonction a ^{x} comme la fonction réciproque de la fonction $\log_a$. Il ne nous a pas semblé indispensable de proposer à nouveau des rappels sur les fonctions réciproques. Si l'utilisateur a déjà oublié, il peut re visionner ces rappels en revenant en arrière.

Nous avons alors fait le choix, dans cette UA réservée à la définition des fonctions exponentielles en base quelconque, de donner quelques propriétés. Les preuves des propriétés ne doivent poser aucun problème car elles ne sont qu'une généralisation des preuves des propriétés de la fonction exponentielle e^x. Ces propriétés ne sont d'ailleurs pas démontrées.

Les seules propriétés que l'utilisateur n'a pas encore rencontrées sont les suivantes : $(ab)^x = a^x b^x$ et $a^x = e^{x \ln a}$.

Cette dernière propriété sera souvent utilisée par les étudiants en biologie et bien souvent, ils ne voient pas le lien entre ces deux fonctions.

12.Représentation graphique de a^x

Contenu et découpages en écrans

Cette UA comporte 4 écrans et étudie le graphe de la fonction exponentielle en base a selon les valeurs de la constante a.

(35) Soit $y = a^x$

On a alors : $\ln y = x \ln a$

En dérivant les deux membres de cette égalité, on obtient :

$$\frac{y'}{y} = \ln a$$

ou encore : $y' = y \ln a = a^x \ln a$

Représentation graphique de a^x ($a > 0$, $a \neq 1$).

Pour représenter graphiquement a^x, calculons-en la dérivée première (5) et la dérivée seconde (6).

- $\left(a^x\right)' = (\ln a) a^x$ (35)
- $\left(a^x\right)'' = \left(a^x \ln a\right)' = (\ln a)^2 a^x$

On remarque que le facteur lna intervient dans ces deux dérivées. Or on sait que : - lna < 0 si 0 < a < 1

- lna > 0 si a > 1

et par conséquent le graphe de a^x dépendra du signe de la constante lna, c'est-à-dire de la position du nombre a par rapport à 1. (22)

$\boxed{\text{Si}\quad 0<a<1\ :\ \text{on a } \ln a < 0}$

Grâce à $y = a^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln a$, on peut voir que :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x > 0 \Rightarrow \ln y < 0 \Rightarrow 0 < y < 1 \\ \quad x < 0 \Rightarrow \ln y > 0 \Rightarrow y > 1 \\ \quad x = 0 \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = a^x > 0 \text{ (pour tous les x réels)}$$

- $y' = (\ln a)a^x < 0$ $\Rightarrow$ la fonction a^x est décroissante
- $y'' = (\ln a)^2 a^x > 0$ $\Rightarrow$ le graphe de la fonction a^x a une concavité tournée vers les y>0

$\boxed{\text{Si } a>1 : \text{ on a } \ln a > 0}$

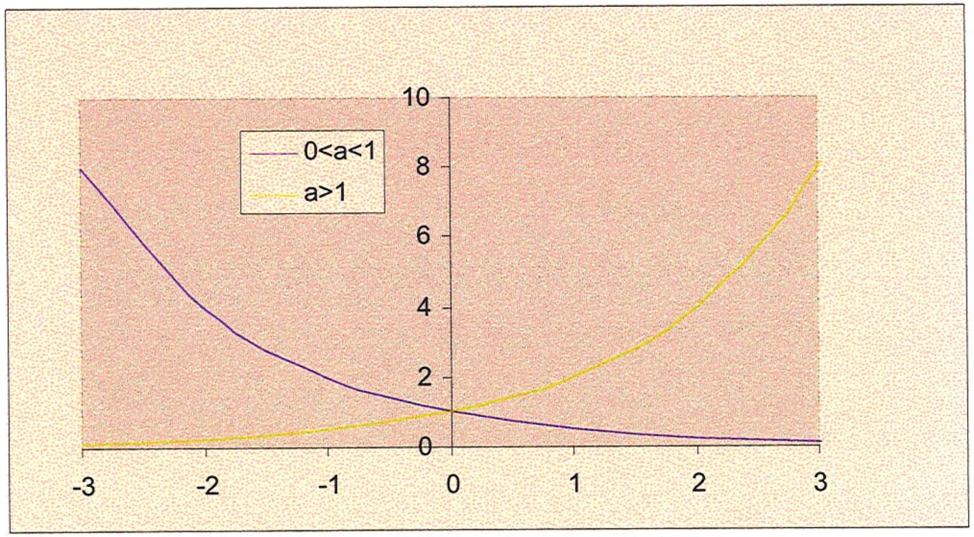
Grâce à $y = a^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln a$, on peut voir que :

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow \ln y > 0 \Rightarrow y > 1 \\ x < 0 \Rightarrow \ln y < 0 \Rightarrow 0 < y < 1 \\ x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = a^x > 0$$

- $y' = (\ln a)a^x > 0 \quad \Rightarrow$ la fonction a^x est croissante
- $y'' = (\ln a)^2 a^x > 0 \quad \Rightarrow$ le graphe de la fonction a^x a une concavité tournée vers les y>0

Finalement, les mathématiciens ont montré que le graphe de a^x a l'allure suivante :

$y = a^x$



Discussions

L'utilisateur est amené à réutiliser des concepts déjà vus. En effet, il doit se rappeler que pour représenter une fonction, il faut en calculer la dérivée première pour connaître sa croissance ou sa décroissance et la dérivée seconde pour connaître la concavité du graphe. S'il a oublié ces liens, il peut retourner les visionner.

Nous apercevons rapidement que le graphe est différent selon la position de la constante a par rapport à 1. En effet, la positivité de la dérivée première dépend de la constante lna et encore de la constante a.
L'étude du graphe est ainsi divisée en deux parties. Une première partie dans le cas où $0<a<1$ et une deuxième partie pour le cas où $a>1$. Chaque partie est reprise sur un même écran.

Dans chaque partie, les étapes sur la discussion de la position de la constante a par rapport à 1 sont les plus explicites possibles. Pour cela, nous faisons appel aux connaissances de l'utilisateur sur la fonction logarithme népérien.

Finalement, avec toutes ces étapes, l'utilisateur peut facilement dessiner le graphe des fonctions exponentielles de base a en fonction de la constante a.
Pour plus de facilité pour l'utilisateur, ces graphes sont superposés. L'étudiant peut ainsi bien visionner les différences entre le graphe de a^x lorsque $a>1$ et lorsque $0<a<1$ sans changer d'écran.

13.Entraînons-nous

Contenu et découpages en écrans

Nous avons étudié la définition, les propriétés et le graphe des fonctions exponentielles de base quelconque. Il est alors intéressant que l'utilisateur teste ses connaissances sur cette matière.

Cette UA propose donc quelques exercices et est composée de 8 écrans.

(36) On utilise la propriété $a^{x} = e^{x(\ln a)}$

$4^{x} = e^{x\ln 4}$

(37) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{125}\right)^{x} = e^{-x\ln 125} = e^{-x\ln 5^3}$

(38) $2^{-\frac{x}{3}} = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^{x} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{x} = e^{x\ln 2^{-\frac{1}{3}}} = e^{\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)x}$

(39) $-5^{-\frac{x}{2}} = -\left(5^{-\frac{1}{2}}\right)^{x} = -e^{x\ln\left(5^{-\frac{1}{2}}\right)} = -e^{x\left(-\frac{1}{2}\ln 5\right)}$

Entraînons-nous.

1) Exprimez les exponentielles suivantes comme des puissances de e

* 4^{x} (36)

* $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x}$ (37)

* $2^{-\frac{x}{3}}$ (38)

* $-5^{-\frac{x}{2}}$ (39)

(40) $e^{0.3x} = (e^{0.3})^{x} \Rightarrow a = e^{0.3} = 1,3498\ldots$

(41) $e^{-\;x} = (e^{-\;})^{x} \Rightarrow a = e\_ = 1,6487\ldots$

(42) $e^{-3x} = (e^{-3})^{x} \Rightarrow a = e^{-3} = 0,04978\ldots$

(43) $e^{3,5\,x} = (e^{3,5})^{x} \Rightarrow a = e^{3,5} = 33,1154\ldots$

2) Trouvez la base a dans les égalités suivantes :

$* \; e^{0.3x} = a^{x}$ (40)

$* \; e^{\frac{1}{2}x} = a^{x}$ (41)

$* \; e^{-3x} = a^{x}$ (42)

$* \; e^{3.5x} = a^{x}$ (43)

(44) $2^{3} = e^{3\ln 2}$

or $\ln 2 = 0{,}6931\ldots$

et $3x\ln 2 = 2{,}0794\ldots$

$\Rightarrow$ l'égalité est correcte

(45) $3^{0,5} = e^{0,5\ln 3}$

or $\ln 3 = 1{,}0986\ldots$

et $0{,}5\ln 3 = 0{,}5493\ldots$

$\Rightarrow$ l'égalité est correcte

(46) $10^{3,4} = e^{3,4\ln 10}$

or $\ln 10 = 2{,}3026\ldots$

et $3{,}4\ln 10 = 7{,}8288\ldots$

$\Rightarrow$ l'égalité est incorrecte

(47) $1/5^{2,8} = e^{2,8\ln 1/5}$

or $\ln 1/5 = -1{,}6094\ldots$

et $2{,}8\ln 1/5 = -4{,}5064\ldots$

$\Rightarrow$ l'égalité est incorrecte

3) Vérifiez si les égalités suivantes sont correctes :

$*\, 2^{3} = e^{2.0794\ldots}$ (44)

$*\, 3^{0.5} = e^{0.5493\ldots}$ (45)

$*\, 10^{3.4} = e^{2.3}$ (46)

$*\left(\frac{1}{5}\right)^{2.8} = e^{5.6\ldots}$ (47)

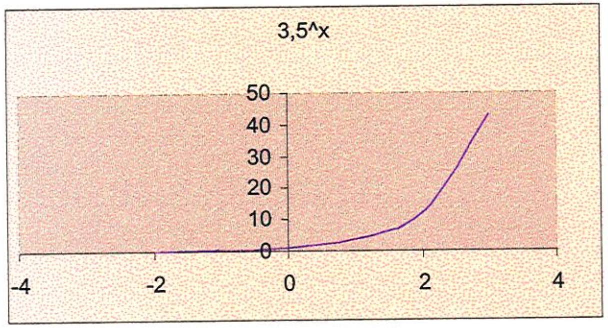
4) Les fonctions suivantes sont-elles croissantes ou décroissantes ?

Esquissez leur graphe.

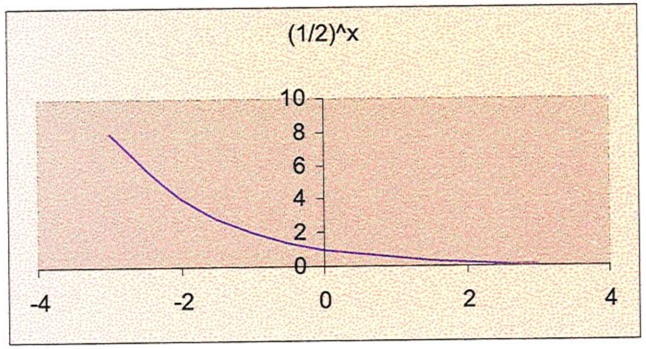
* $(3.5)^x$ (48)

* $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (49)

(48) $(3.5)^x = a^x$ avec $a>1$ $\Rightarrow$ croissante

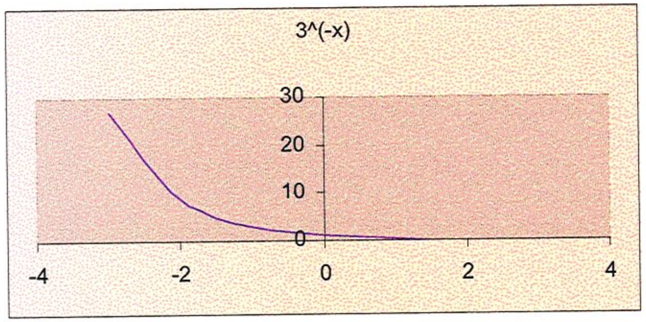


(49) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = a^x$ avec $0<a<1$ $\Rightarrow$ décroissante

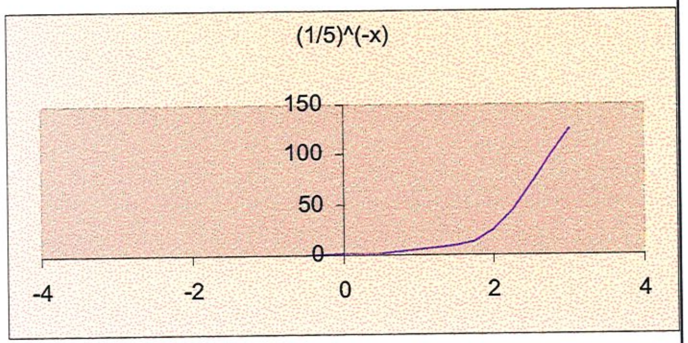


(50) $3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x = a^x$ avec $0<a<1$

$\Rightarrow$ décroissante



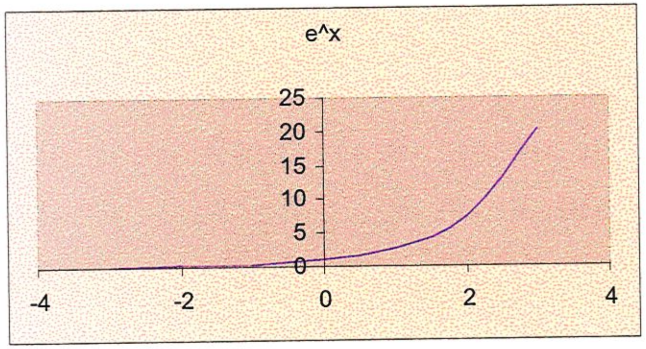
(51) $(1/5)^{-x} = 5^x = a^x$ avec $a>1$ $\Rightarrow$croissante



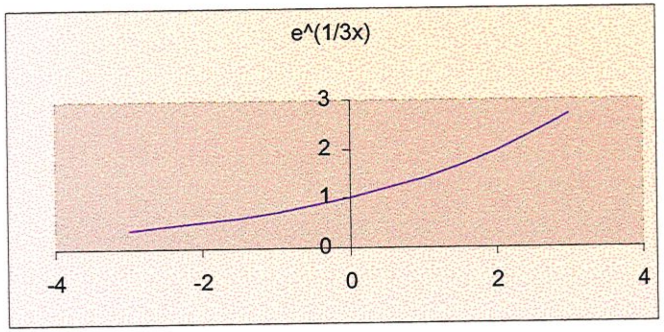
$* \, 3^{-x}$ (50)

$* \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$ (51)

(52) $e^x = a^x$ avec a>1 $\Rightarrow$ croissante



(53) $e^{\frac{1}{3}x} = \left(e^{\frac{1}{3}}\right)^x = \left(\sqrt[3]{e}\right)^x = (1.3956)^x = a^x$ avec a>1 $\Rightarrow$ croissante



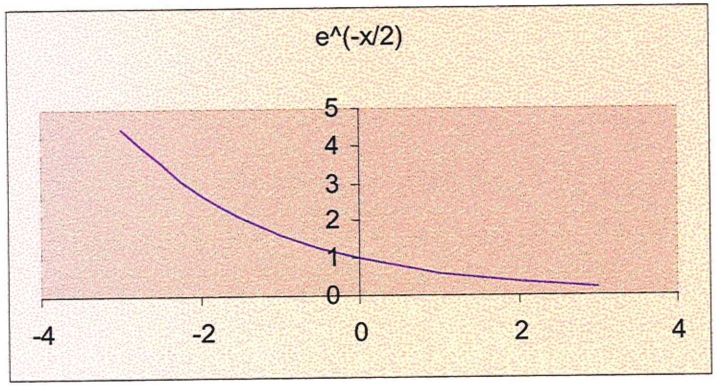
$* \, e^x$ (52)

$* \, e^{\frac{1}{3}x}$ (53)

$* e^{\frac{-x}{2}}$ (54)

(54) $e^{-\frac{x}{2}} = \left(\sqrt{\frac{1}{e}}\right)^x = (0.60653)^x = a^x$ avec

$0<a<1 \Rightarrow$ décroissante



5) $y = e^{\alpha x}$ avec α un réel

- Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle définie ?
- Est-ce que cette fonction est croissante, décroissante?

Esquissez le graphe. (55)

(55) $y = e^{\alpha x} = (e^{\alpha})^x = a^x$ avec $a = e^{\alpha}$

•La fonction a^x est définie pour tous les x donc la fonction $e^{\alpha x}$ aussi.

•On a vu que :

si $0 < a < 1$: a^x est décroissante et son graphe a une concavité tournée vers le haut

si $a > 1$: a^x est croissante et son graphe a une concavité tournée vers le haut

On sait aussi que $a = e^{\alpha}$.

On a alors : $0<a<1 \Leftrightarrow 0<e^{\alpha}<1 \Leftrightarrow \alpha<0$

$a>1 \Leftrightarrow e^{\alpha}>1 \Leftrightarrow \alpha>0$

Finalement :

Si $\alpha<0$:$e^{\alpha x}$ est décroissante et son graphe a une concavité tournée vers le haut

Si $\alpha>0$:$e^{\alpha x}$ est croissante et son graphe a une concavité tournée vers le haut

Discussions

Cette série de tests propose cinq questions. Comme une propriété importante, pour les étudiants en biologie, est la conversion d'une fonction exponentielle e^x en une fonction exponentielle de base a et inversement ($a^x = e^{x\ln a}$), trois exercices différents sont consacrés à cette propriété.

Dans le premier exercice, il est demandé d'exprimer une fonction exponentielle de base a au moyen de la fonction exponentielle e^x. Cet exercice demande d'abord une certaine manipulation des énoncés pour ensuite appliquer la formule $a^x = e^{x\ln a}$. Cet exercice sert d'entraînement pour les autres.

Le deuxième exercice propose une démarche inverse à celle du premier exercice, c'est-à-dire que nous demandons de transformer une exponentielle e^x en une exponentielle de base a.

Ces deux premiers exercices permettront à l'apprenant, face à un problème concret, de pouvoir comparer des choses comparables En effet, s'ils ont deux phénomènes modélisés suivant deux exponentielles de bases différentes, ils pourront les exprimer comme des puissances de e et ainsi pouvoir les manipuler et les comparer plus facilement.

Le troisième exemple est dans le même style mais est encore plus adapté aux biologistes. En effet, dans la réalité, ils trouveront plus souvent des puissances d'exponentielles qui sont des réels plutôt que des puissances qui sont des multiples de lna.
Cet exercice leur permet également d'utiliser la calculatrice qui est un outil indispensable.

Le quatrième exercice est une application de manipulation de graphes. L'utilisateur doit manipuler l'énoncé pour arriver à une forme du type a^x et ensuite vérifier la position de a par rapport à 1 pour voir la croissance et la décroissance des fonctions proposées. Cet exercice est important car notre public travaille très souvent avec des graphiques. Lorsque les biologistes veulent modéliser un phénomène, ils font des observations, relèvent des données et ensuite les représentent graphiquement avant de pouvoir en trouver un modèle.

Le dernier exercice est un exercice plus théorique mais tout aussi important. Nous nous sommes rendue compte que les étudiants en biologie rencontrent très souvent des fonctions du type $e^{\alpha x}$ et qu'ils ne savent pas toujours les analyser correctement. Nous avons donc opté

pour étudier ces fonctions mais sous forme d'exercice. En effet, l'étude de ces fonctions utilise énormément de notions rencontrées dans ce cours.
Cet exercice a donc deux utilités. La première est d'étudier les fonctions du type $e^{\alpha x}$ car elles sont très utiles. La deuxième utilité est de tester les connaissances de l'étudiant. Il pourra se rendre compte si en fin de parcours il a retenu quelques concepts ou s'il a encore des lacunes et estime qu'il doit revenir en arrière.

Ces cinq exercices sont, comme pour chaque séance de test, corrigés dans les pages périphériques. Pour chaque énoncé, nous avons donné tous les détails de la réponse. De plus, l'utilisateur peut se corriger après chaque énoncé sans attendre la fin de l'exercice.

14.Synthèse générale sur les fonctions logarithmes et exponentielles.

Contenu et découpages en écrans

A ce niveau-ci, tous les concepts sur les fonctions exponentielles et logarithmes ont été vus et testés. Mais, pour arriver à cette étape, l'utilisateur doit rencontrer un nombre assez important d'écrans. Il était donc intéressant de faire une synthèse reprenant les éléments les plus importants.

Cette synthèse est présentée dans cette UA et comprend 7 écrans.

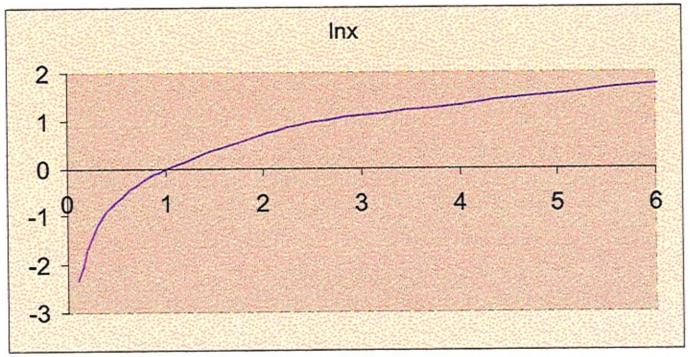
Synthèse.

1) La fonction logarithme népérien

La fonction lnx est telle que :

- lnx est définie pour tous les $x > 0$
- $(\ln x)' = 1/x$
- $\ln 1 = 0$

Son graphe :



Ses propriétés :

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
- $\ln\left(x^r\right) = r \ln x$
- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$

où x et y sont > 0 et r est un nombre entier positif, négatif ou nul ou un quotient de deux nombres entiers.

Comme nous connaissons à présent la signification de x^r où r est un réel, nous pouvons généraliser la troisième propriété pour des valeurs de r réelles.

2) Les fonctions logarithmes en base a

Le logarithme en base a de x où a est une constante > 0, ≠ 1 et x > 0 est

défini par :

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$$

Ses propriétés :

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x_r) = r \log_a x$
- $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

où x et y sont > 0 , a une constante > 0 , ≠ 1 et r un nombre réel.

De même que pour le logarithme népérien, nous pouvons généraliser la troisième propriété pour des valeurs de r réelles.

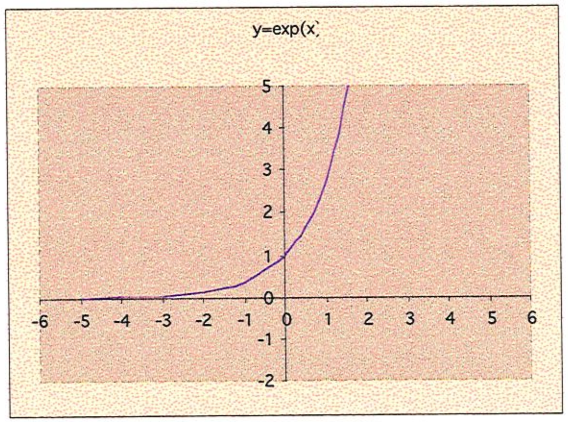
3) La fonction exponentielle.

L'exponentielle est telle que :

$$y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$$

où x est un nombre réel.

Son graphe :



Ses propriétés :

- $e^0 = 1$
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{xy} = \left(e^x\right)^y$
- $\ln(e^x) = x$
- $e^{\ln x} = x \ (x > 0)$

où x et y sont des nombres réels.

4) Les fonctions exponentielles en base a.

L'exponentielle en base a où x et y sont des nombres réels et a une constante > 0, ≠ 1 est définie par :

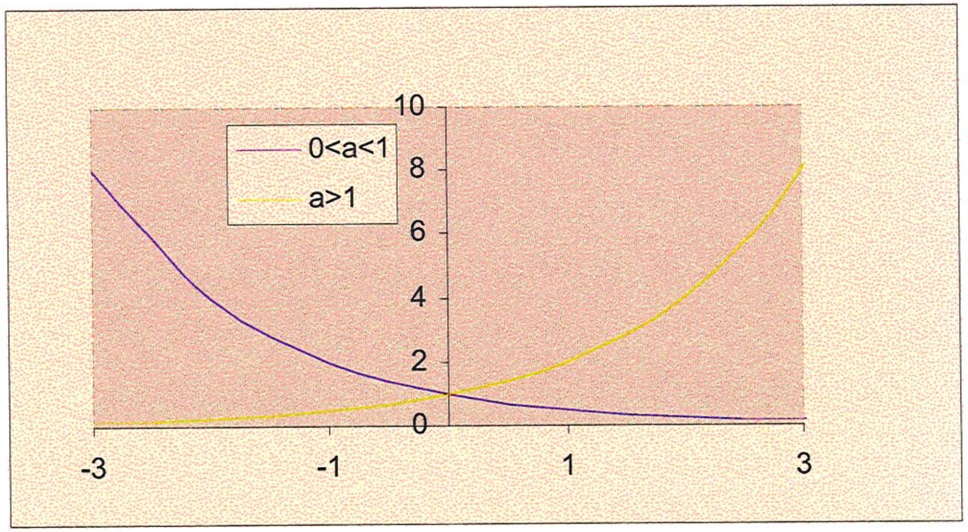
$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Ses propriétés :

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $a^0 = 1$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $a^x = e^{x \ln a}$

Graphiquement :

$$y = a^x$$



Discussions

Cette synthèse reprend, pour chaque fonction, les informations étudiées, à savoir : la définition, les propriétés et le graphe. Les quatre fonctions, le logarithme népérien, les logarithmes en base quelconque, l'exponentielle et les exponentielles de base quelconque, sont donc résumées en quelques écrans.

Nous estimons que cette synthèse a une grande importance. Elle a en effet plusieurs rôles.
Le premier rôle est de permettre à l'élève, après avoir vu toute une série de concepts, d'en avoir une vue d'ensemble et un résumé condensé.

De plus, lors d'expériences, si un étudiant a besoin de l'une ou l'autre notion, il n'est pas obligé de revoir tous les écrans mais peut directement accéder à la synthèse et trouver rapidement l'information nécessaire.

Lors de cette synthèse, nous pouvons généraliser les propriétés $\ln(x^r)=r\ln x$ et $\log_a(x^r)=r\log_a x$ pour des valeurs de r réelles car nous connaissons à présent la signification de x^r pour des valeurs de r réelles.

Chapitre 4 : Le parcours intuitif

Dans ce deuxième parcours, nous nous basons sur des exemples concrets pour étudier les fonctions exponentielles. En effet, chaque exemple permet de définir un concept ou la signification d'un paramètre de ces fonctions.

En tant que mathématicienne, ce parcours me semblait plus difficile. En effet, nous avons très peu l'habitude de partir d'exemples pour développer des théories. Nous ne savions pas comment débuter, vers où aller, comment procéder... De plus, la biologie est pour nous une matière presque inconnue. C'est donc principalement au cours de cette partie que les biologistes sont intervenus et nous ont donné beaucoup d'idées.

Comme ce parcours développe très peu de théorie et de propriétés, il n'y aucune démonstration ou explication relatives aux propriétés dans les pages périphériques. Par contre, comme il comprend beaucoup de tableaux et de graphes, les pages périphériques leurs sont réservées. Dans le premier parcours, les pages périphériques (démonstrations, explications complémentaires) n'étaient pas obligatoires. L'étudiant pouvait suivre l'exposé sans y accéder. Par contre, dans ce parcours, les tableaux et graphes sont indispensables. C'est pourquoi une autre écriture est utilisée dans les pages web. L'étudiant ne devra plus cliquer sur une petite icône mais devra cliquer sur une phrase mise en couleur qui lui dira ce que contient cette page périphérique.

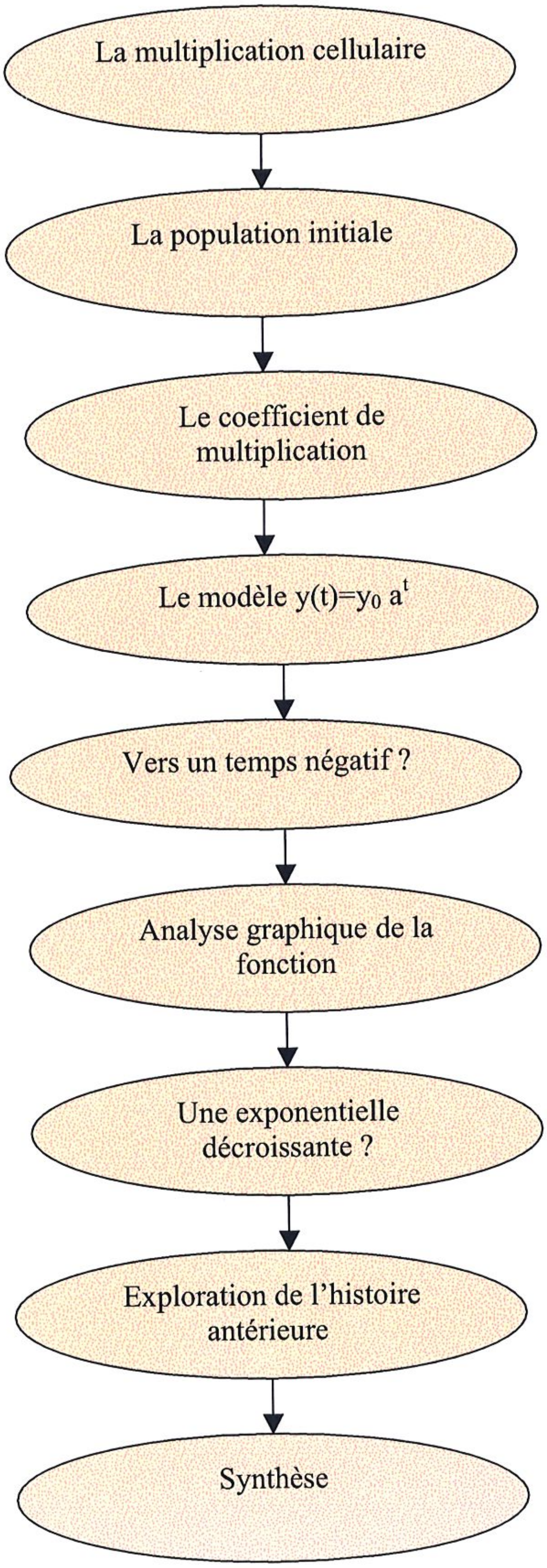
Dans ce second parcours, contrairement aux cliquages facultatifs qui sont représentés par des numéros, les cliquages obligatoires sont représentés par des phrases soulignées et en italique, accompagnées d'une numérotation romaine pour retrouver facilement à quoi ils correspondent.
De plus, pour les quatre premiers exemples ainsi que pour le dernier, un schéma représentant la situation apparaît de façon spontanée sur la partie gauche de l'écran. Dans ce manuscrit, ces schémas sont précédés de la phrase « apparaît tout seul ».

Pour le reste, la structure est semblable au parcours théorique. Les mêmes caractéristiques ont été respectées :

- un caractère d'écriture assez grand
- un contrôle du passage d'un écran à l'autre
- un vocabulaire adapté
- des titres accrocheurs
- des couleurs
- une présentation uniforme
- rien de superflus
- aller à l'essentiel

Nous commençons la retranscription et l'explication des différentes UA en présentant un schéma de la carte de navigation.

1.La carte de navigation du parcours intuitif



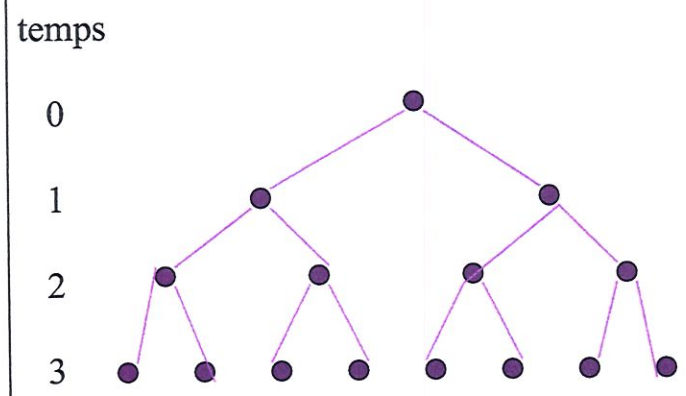
2.La multiplication cellulaire

Contenu et découpages en écrans

Notre but est, à partir d'exemples concrets, de trouver une fonction qui modélise la situation et ensuite de généraliser ce modèle. Nous voulons ici définir les fonctions exponentielles de base quelconque et interpréter leurs paramètres, et ce à partir d'exemples. On sait que deux paramètres caractérisent une fonction exponentielle du type $y(t) = y_0.a^t$: les paramètres y_0 et a. Nous les avons donc fait varier afin que l'apprenant découvre leur signification. Pour cela, nous avons pris quatre exemples. Chaque exemple ayant un but bien précis pour trouver la signification d'un paramètre.

Cette UA étudie un exemple qui mène à une première interprétation du paramètre a et est composée de 2 écrans.

APPARAIT TOUT SEUL



La multiplication cellulaire:

On s'intéresse à un organisme unicellulaire placé dans un milieu propice à sa division, sans aucune ressource limitante, qui voit sa population croître à l'infini.

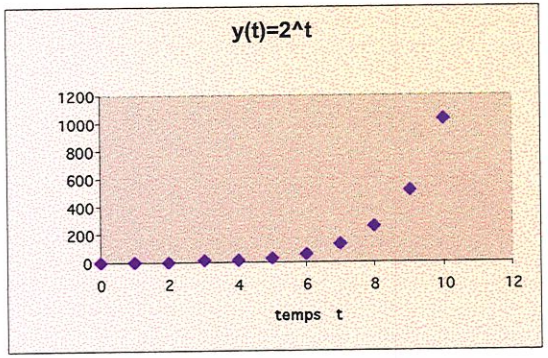
Considérons une échelle de temps telle que, à partir d'une cellule au temps $t = 0$, on attende, en principe

- 2 cellules au temps $t = 1$
- 4 cellules au temps $t = 2$
- etc.…

(I)

t	y(t)
0	$1 = 2^0$
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
4	$16 = 2^4$
5	$32 = 2^5$
6	$64 = 2^6$
7	$128 = 2^7$
8	$256 = 2^8$
9	$512 = 2^9$
10	$1024 = 2^{10}$

(II)



Appelons y(t) le nombre de cellules au temps t

Considérons l'évolution de y(t) sur un intervalle de temps de 0 à 10. (I)

Par exemple, au temps t=7, le nombre de cellules est $y(7) = 2^7 = 128$.

On remarque que

$y(t) = 2^t$ où t est un nombre entier > 0

On peut aussi représenter graphiquement ces valeurs (II)

Discussions

L'exemple qui est repris et expliqué dans cette première UA permet une première approche de la modélisation et de l'interprétation des paramètres. Nous avons étudié le phénomène de multiplication cellulaire, phénomène que la plupart des étudiants en biologie connaissent déjà. Dès que l'étudiant commence cette UA, le schéma représentant le phénomène apparaît sur la partie gauche de l'écran.

Nous commençons par poser le problème en expliquant les notations utilisées (y(t), échelle de temps). Ensuite l'élève doit cliquer pour avoir le tableau représentant l'évolution du nombre de cellules sur un intervalle de temps de 0 à 10.
L'intérêt de noter dans le tableau le nombre de cellules sous forme d'un exposant permet de déduire rapidement la forme générale de la fonction modélisant ce phénomène.

Une fois que l'apprenant a observé ce tableau, il doit nécessairement cliquer pour obtenir une représentation graphique de la situation.

Nous avons fait le choix de mettre ces tableaux et graphe dans les pages périphériques afin que l'utilisateur ne doive pas toujours retourner en arrière pour se rappeler des données du problème.

Ce premier exemple permet donc à l'utilisateur d'avoir une première approche de la fonction qui sera définie ultérieurement et peut-être une première idée sur l'interprétation du paramètre a du modèle $y(t) = y_0.a^t$.

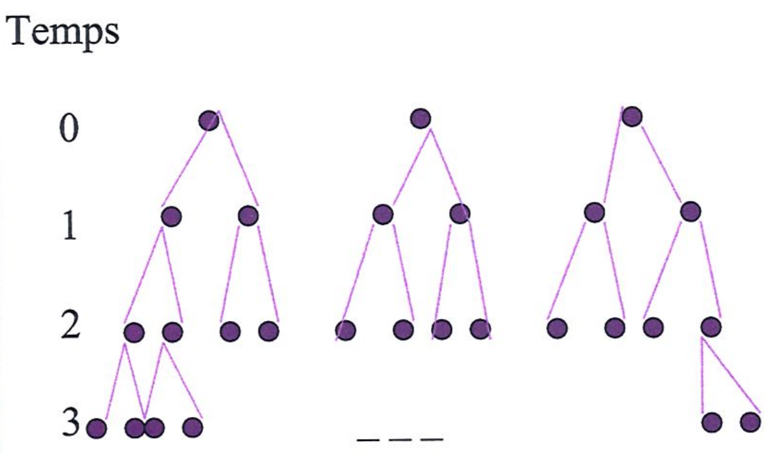
3.La population initiale

Contenu et découpages en écrans

Cette deuxième UA propose un exemple qui permet de mettre en évidence l'importance du deuxième paramètre du modèle $y(t) = y_0.a^t$: y_0.

Cette UA comporte 2 écrans.

APPARAIT TOUT SEUL



La population initiale:

Considérons à présent la situation où l'on dispose de 3 cellules au temps t=0.

Soit y(t) le nombre de cellules au temps t.(III)

On remarque que :

$y(t) = 3.2^t$ où t est un nombre entier > 0

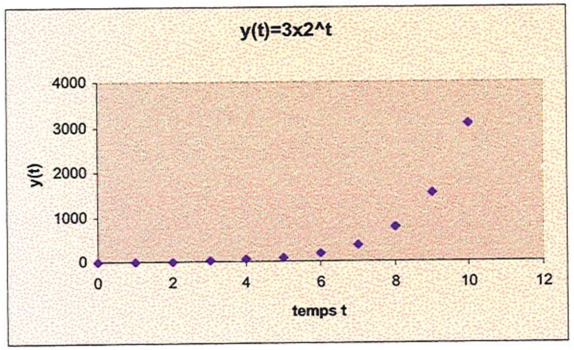
Le paramètre 2 exprime le fait que le nombre de cellules se multiplie par 2 à chaque unité de temps et le paramètre 3 représente le fait que la population initiale (au temps t = 0) soit de 3 cellules.

Représentons ces données graphiquement. (IV)

(III)

t	$y(t)$
0	$3 = 3.2^0$
1	$6 = 3.2^1$
2	$12 = 3.2^2$
3	$24 = 3.2^3$
4	$48 = 3.2^4$
5	$96 = 3.2^5$
6	$192 = 3.2^6$
7	$384 = 3.2^7$
8	$768 = 3.2^8$
9	$1536 = 3.2^9$
10	$3072 = 3.2^{10}$

(IV)



Comparons les 2 situations :

Première observation

1 cellule — 3 cellules

t	$y(t)$	t	$y(t)$
0	2^0	0	3.2^0
1	2^1	1	3.2^1
2	2^2	2	3.2^2
3	2^3	3	3.2^3
4	2^4	4	3.2^4
5	2^5	5	3.2^5
6	2^6	6	3.2^6
7	2^7	7	3.2^7
8	2^8	8	3.2^8
9	2^9	9	3.2^9
10	2^{10}	10	3.2^{10}
$y(t) = 2^t$		$y(t) = 3.2^t$	

Discussions

Pour voir l'importance du paramètre représentant la population initiale, nous avons repris l'exemple de la multiplication cellulaire en supposant, qu'à la place d'avoir une cellule au départ, nous en ayons trois. Nous avons gardé la même structure que pour l'exemple précédent : position du problème, tableau reprenant les données et graphe.

L'utilisateur clique sur une première phrase colorée pour avoir le tableau représentant le nombres de cellules pour des valeurs différentes du temps t. De ce tableau, comme les résultats sont notés sous une forme avec un exposant, nous déduisons une fonction générale représentant la situation pour toute valeur entière de t.
Nous faisons alors remarquer la signification des deux paramètres.
L'apprenant visionne ensuite le graphe représentant les données.

Nous avons terminé cette UA en proposant un tableau reprenant les deux premières situations qui permet à l'utilisateur de voir la différence entre les fonctions générales lorsque la population initiale est modifiée.

4.Le coefficient de multiplication

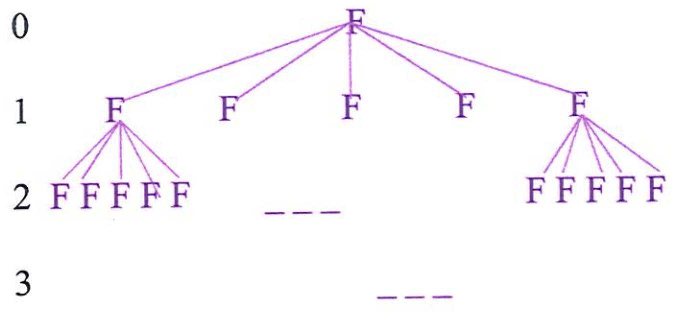
Contenu et découpages en écrans

Après avoir fait varier le paramètre représentant la population initiale (y_0), nous devons faire varier celui qui représente le coefficient de multiplication (a).

Cette UA, composée de 2 écrans, étudie un troisième exemple qui fait varier ce deuxième paramètre.

APPARAÎT TOUT SEUL

Temps



Le coefficient de multiplication:

Une lapine, à la première unité de temps, met au monde 10 lapins, dont 5 femelles.

A la deuxième unité de temps, ces 5 femelles mettent au monde, à leur tour, 10 lapins chacune, dont 5 femelles.

On suppose que la multiplication se poursuit indéfiniment de cette façon.

Considérons les valeurs de y(t).(V)

On remarque alors que le nombre de lapines au temps t vaut :

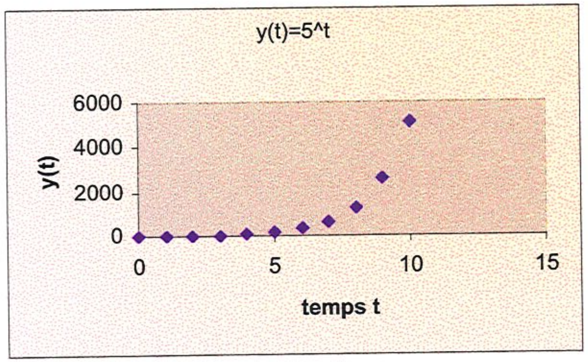
$$\boxed{y(t) = 5^{t} \quad \text{où t est un nombre entier} > 0}$$

Représentations ces données graphiquement. (VI)

(V)

t	$y(t)$
0	$1 = 5^0$
1	$5 = 5^1$
2	$25 = 5^2$
3	$125 = 5^3$
4	$625 = 5^4$
5	$3125 = 5^5$
6	$15625 = 5^6$
7	$78125 = 5^7$
8	$390625 = 5^8$
9	$1953125 = 5^9$
10	$9765625 = 5^{10}$

(VI)



Comparons ce dernier exemple où le coefficient de multiplication est 5 (5 femelles naissent à chaque étape) avec l'exemple où le coefficient de multiplication est 2 (multiplication cellulaire).

t	$y(t)$	t	$y(t)$
0	2^0	0	5^0
1	2^1	1	5^1
2	2^2	2	5^2
3	2^3	3	5^3
4	2^4	4	5^4
5	2^5	5	5^5
6	2^6	6	5^6
7	2^7	7	5^7
8	2^8	8	5^8
9	2^9	9	5^9
10	2^{10}	10	5^{10}
$y(t) = 2^t$		$y(t) = 5^t$	

Nous voyons bien, en comparant les deux exemples, l'importance des paramètres 2 et 5.

Discussions

Cet exemple fait varier le coefficient de multiplication. En effet, au lieu d'avoir une situation où une cellule se multiplie en deux cellules, nous avons supposé une situation où une lapine donne naissance à cinq lapines, qui à leur tour donnent naissance à cinq lapines chacune.

Lorsque l'utilisateur entreprend cette UA, il voit un schéma représentant la situation des lapins qui se multiplient.

Nous avons encore gardé la même structure que lors des deux premiers exemples.

Nous avons estimé intéressant de comparer cette situation avec la première afin de bien mettre en évidence la différence entre les deux fonctions générales lorsque le coefficient de multiplication change.

5.Le modèle $y(t) = y_0a^t$

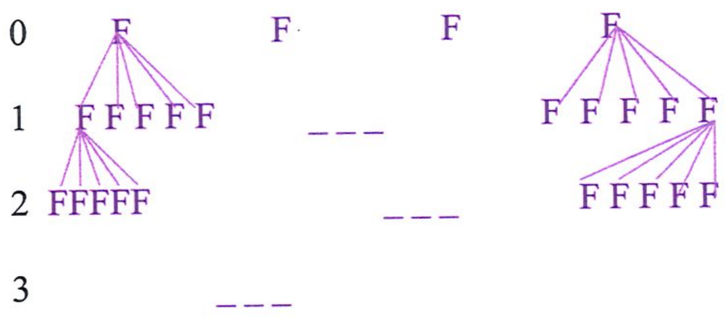
Contenu et découpages en écrans

A ce niveau-ci, nous avons fait varier les deux paramètres. Nous arrivons donc doucement à trouver une fonction générale modélisant tous ces phénomènes.

Cette UA, composée de 2 écrans, définit le modèle général : $y(t) = y_0a^t$.

APPARAÎT TOUT SEUL

Temps



Le modèle $y(t) = y_0 a^t$:

Supposons à présent, qu'au lieu d'avoir 1 lapine au départ, nous en ayons 4.

Comme 1 lapine donne naissance à 5 lapines, *le nombre y(t) de lapines au temps t est (VII)*

On a alors :

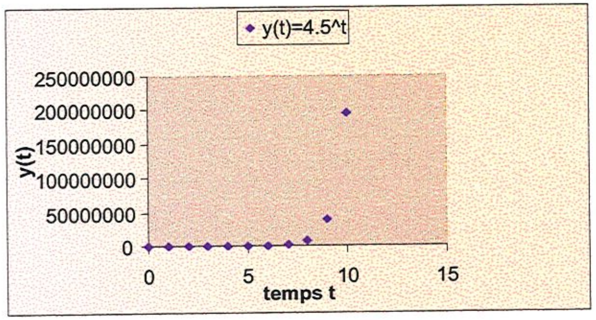
$y(t) = 4.5^t$ où t est un nombre entier > 0

Représentons graphiquement ces données. (VIII)

(VII)

t	y(t)
0	$4 = 4.5^{0}$
1	$20 = 4.5^{1}$
2	$100 = 4.5^{2}$
3	$500 = 4.5^{3}$
4	$2500 = 4.5^{4}$
5	$12500 = 4.5^{5}$
6	$62500 = 4.5^{6}$
7	$312500 = 4.5^{7}$
8	$1562500 = 4.5^{8}$
9	$7812500 = 4.5^{9}$
10	$39062500 = 4.5^{10}$

(VIII)



Nous pouvons représenter toutes les situations précédemment décrites dans un tableau.

Nombre d'individus au temps t=0	Coefficient de multiplication par unité de temps	y(t)
1	2	$1.\,2^{t}$
3	2	$3.\,2^{t}$
1	5	$1.\,5^{t}$
4	5	$4.\,5^{t}$

De façon générale, y(t), le nombre d'individus au temps t peut s'écrire:

$$y(t) = y_0.a^t \quad \text{où t est un nombre entier} > 0$$

Les exemples ont montré que :

- y_0 est la valeur initiale (nombre d'individus au temps t=0)
- a est le coefficient de multiplication par unité de temps

Discussions

Cette dernière situation où les deux paramètres changent permet de bien voir le rôle de chacun des paramètres.

Pour généraliser les quatre situations décrites par les quatre exemples rencontrés, nous avons utilisé un tableau reprenant la population initiale, le coefficient de multiplication et la fonction décrivant le nombre d'individus. De là découlait la fonction générale avec les paramètres déjà expliqués par les exemples. C'est bien pour cette raison que nous avons appelé ce parcours « interprétation des paramètres à priori ». En effet, avant de généraliser la fonction, on connaissait déjà l'interprétation des paramètres.

Jusqu'à présent, nous n'avons pas encore parlé de cette fonction comme étant la fonction exponentielle car nous n'avons considéré que des situations où la variable t prenait des valeurs entières positives.

6. Vers un temps négatif ?

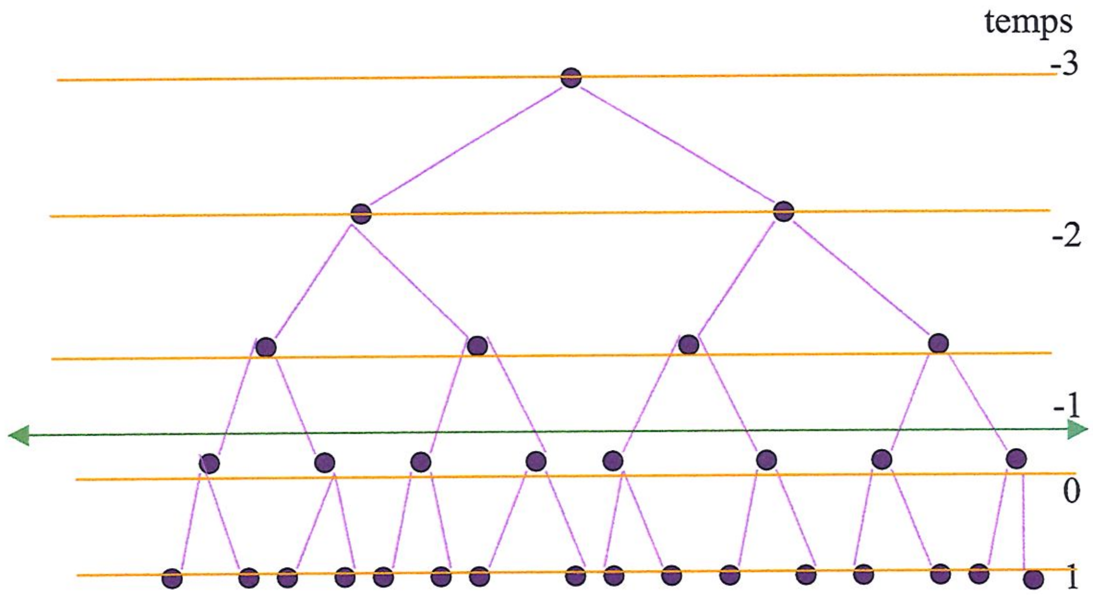
Contenu et découpages en écrans

Nous venons de mentionner que la forme générale de la fonction n'est considérée que pour des entiers positifs. La prochaine étape est donc d'étendre cette fonction à des temps négatifs et ensuite à des valeurs du temps réelles pour pouvoir définir cette fonction comme la fonction exponentielle. C'est l'objet de la présente UA, composée de 3 écrans.

Vers un temps négatif ?

Lorsque nous observons 8 cellules au temps t = 0, il y a nécessairement une histoire antérieure, *que nous nous proposons d'explorer. (IX)*

(IX)



Considérons les valeurs de y(t).(X)

On remarque, de façon générale, que le nombre d'individus vaut :

$y(t) = 2^3.2^t$ où t est un nombre entier > 0, < 0 ou = 0

On remarque donc que les temps négatifs représentent l'historique antérieur au début de l'observation.

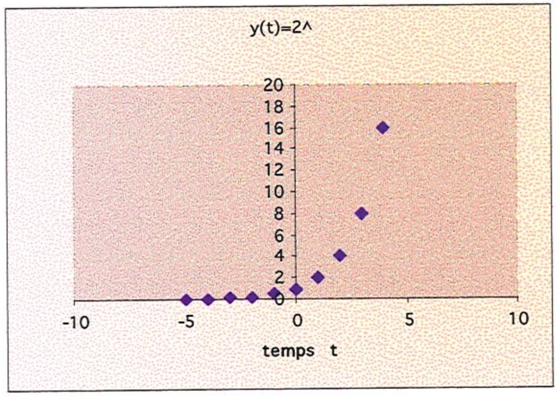
Représentons graphiquement ces valeurs. (XI)

On peut donc observer n'importe quelle valeur de y(t).

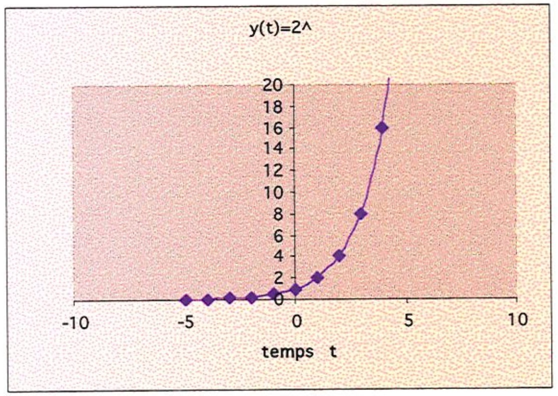
(X)

t	y(t)
-3	$2^0 = 2^3.2^{-3}$
-2	$2^1 = 2^3.2^{-2}$
-1	$2^2 = 2^3.2^{-1}$
0	$2^3 = 2^3.2^0$
1	$2^4 = 2^3.2^1$
2	$2^5 = 2^3.2^2$
3	$2^6 = 2^3.2^3$
4	$2^7 = 2^3.2^4$
5	$2^8 = 2^3.2^5$
6	$2^9 = 2^3.2^6$
7	$2^{10} = 2^3.2^7$

(XI)



(XII)



On voit alors que la fonction

$$y(t) = y_0.a^t$$

est valable pour toutes les valeurs entières de t > 0, < 0 ou = 0.

Les mathématiciens ont montré que cette fonction ne s'étend pas seulement aux nombres entiers négatifs mais aussi à tout nombre réel t.

Cette fonction est appelée ***exponentielle de base a***.

Le graphique de la fonction exponentielle est alors (XII)

Discussions

Pour prendre en compte des temps négatifs, on propose d'explorer l'histoire antérieure d'une situation. Lorsque l'utilisateur entreprend cette UA, il a en face de lui un schéma représentant la population au temps $t = 0$ et $t = 1$ (en dessous de la double flèche). Lorsqu'il clique sur la phrase colorée (nous proposons d'explorer l'histoire antérieure), apparaît alors à l'écran la deuxième partie du schéma : la population pour des temps négatifs (au-dessus de la double flèche).
On s'aperçoit donc que les temps négatifs existent et qu'ils représentent l'historique antérieur au début de l'observation.

A partir de là, on étend le graphe en prolongeant vers des temps négatifs.

Pour l'extension vers des valeurs du temps réelles, nous avons choisi d'admettre le fait, qu'en plus de s'étendre aux temps négatifs, la fonction générale s'étend aux temps réels et nous avons défini cette fonction comme la fonction exponentielle.

Nous terminons l'UA en redessinant le graphe de la fonction « en bouchant les trous » pour représenter les valeurs du temps réelles.

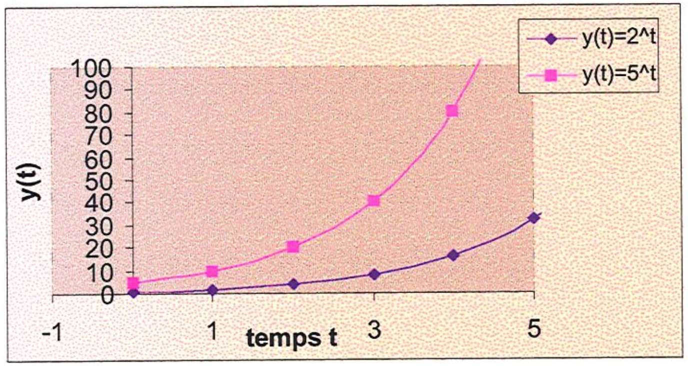
7.Analyse graphique de la fonction

Contenu et découpages en écrans

Afin de ne pas assommer l'utilisateur en lui proposant plusieurs concepts dans une même UA, nous avons estimé intéressant de ne pas entreprendre la comparaison des graphes en même temps que la comparaison de la forme de la fonction représentant le nombre d'individus.

Comme il nous semblait toutefois important d'envisager ces comparaisons de graphes, nous nous y sommes attelée dans cette UA, composée de 2 écrans.

(XIII)



Analyse graphique de la fonction.

Quelles différences observe-t-on sur le graphe lorsque le coefficient de multiplication change ?

Représentons graphiquement (XIII) $y(t) = 2^t$ et $y(t) = 5^t$

On remarque que la fonction $y(t) = 5^t$ croît plus rapidement que la fonction $y(t) = 2^t$.

Ceci est dû au coefficient de multiplication.

Que se passe-t-il lorsque la population initiale est modifiée ?

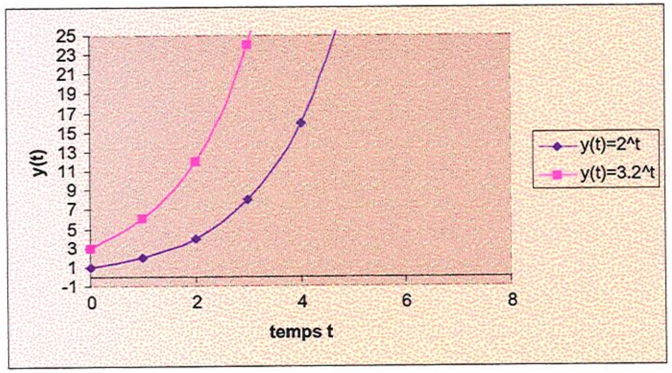
Représentons les fonctions (XIV) $y(t) = 2^t$ et $y(t) = 3.2^t$

On remarque que :

- au lieu de commencer en y(0)=1, le graphe de $y(t) = 3.2^t$ commence en y(0)=3
- le graphe de $y(t) = 3.2^t$ croît plus rapidement car toutes les coordonnées du graphe rouge sont celles du graphe bleu multipliées par 3

C'est à cause du paramètre qui représente la population initiale.

(XIV)



Discussions

La comparaison des graphes repose sur les différents paramètres de la fonction.

La première comparaison étudiée est basée sur un changement du coefficient de multiplication et la deuxième comparaison est basée sur une modification de la population initiale.

Lors de la première comparaison, l'utilisateur s'aperçoit très vite, en cliquant pour obtenir le graphe sur la partie gauche de l'écran, que lorsque le coefficient de multiplication est grand, le graphe de la fonction augmente très rapidement et lorsque ce coefficient est petit, le graphe de la fonction croît moins rapidement.

La deuxième comparaison met en évidence le fait que lorsque le coefficient représentant la population initiale augmente, le point de départ du graphe est décalé vers le haut alors que, quand le coefficient diminue, ce point de départ est décalé vers le bas. De plus, lorsque la population initiale augmente, le graphe croit plus rapidement.

Chaque comparaison est décrite sur un et un seul écran.

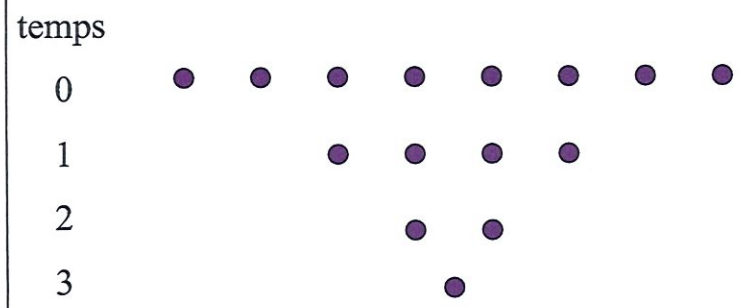
8.Une exponentielle décroissante ?

Contenu et découpages en écrans

Lors de l'étude de ces six premières UA, nous n'avons envisagé que le cas où le coefficient de multiplication est > 1, c'est-à-dire que les fonctions exponentielles croissantes.

Nous allons envisager dans les trois UA suivantes les fonctions exponentielles décroissantes. La première, composée de 2 écrans, définit ces fonctions sur base d'un exemple concret.

APPARAIT TOUT SEUL



Une exponentielle décroissante ?

En pisciculture, la population de poissons dans un étang peut être estimée à partir du nombre de poissons par m^3 lorsque ces poissons sont répartis uniformément dans tout l'étang.

Considérons un étang peuplé de 8 poissons par m^3 et une échelle de temps telle que

- au temps $t = 1$, on pêche la moitié des poissons présents dans l'étang
- au temps $t = 2$, on pêche la moitié des poissons restants dans l'étang
- et ainsi de suite …

Appelons y(t) le nombre de poissons par m^3 au temps t.

Considérons l'évolution de y(t) sur un intervalle de temps de 0 à 3. (XV)

On remarque que

$y(t) = 8.(1/2)^t$ où t est un nombre entier > 0

où, comme précédemment

- 8 est le nombre de poissons par m^3 au temps initial (t = 0)
- $\frac{1}{2}$ est le coefficient de multiplication

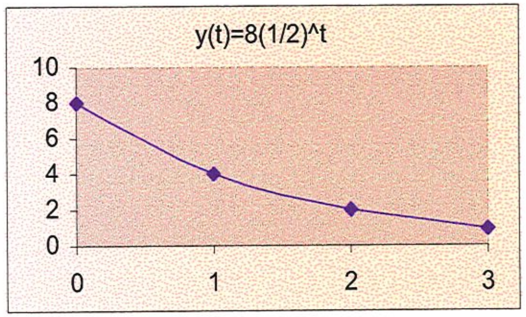
On peut représenter graphiquement ces valeurs (XVI)

On remarque que la fonction y(t) est décroissante et que le coefficient de multiplication est < 1.

(XV)

t	y(t)
0	$8 = 8.(1/2)^0$
1	$4 = 8.(1/2)^1$
2	$2 = 8.(1/2)^2$
3	$1 = 8.(1/2)^3$

(XVI)



Discussions

Nous avons gardé la même structure pour définir les fonctions exponentielles décroissantes que lors de l'étude des fonctions exponentielles croissantes. En effet, nous étudions un exemple concret, nous en donnons un tableau, un graphe et une forme générale de la fonction modélisant le phénomène.

Lorsque l'utilisateur entreprend l'UA, il découvre le phénomène sous forme d'un schéma. Cet exemple étudie le nombre de poissons dans un étang lors d'une pêche. L'apprenant doit cliquer pour avoir le tableau représentant le nombre de poissons par m^3 dans l'étang pour différentes valeurs du temps. Nous déduisons alors du tableau la forme générale de la fonction modélisant la situation. De plus, l'utilisateur doit visualiser le graphe représentant ces données et ainsi s'apercevoir que, contrairement aux fonctions exponentielles analysées dans les premières UA de l'exposé, ces fonctions sont décroissantes et ont un coefficient de multiplication < 1.

9. Exploration de l'histoire antérieure

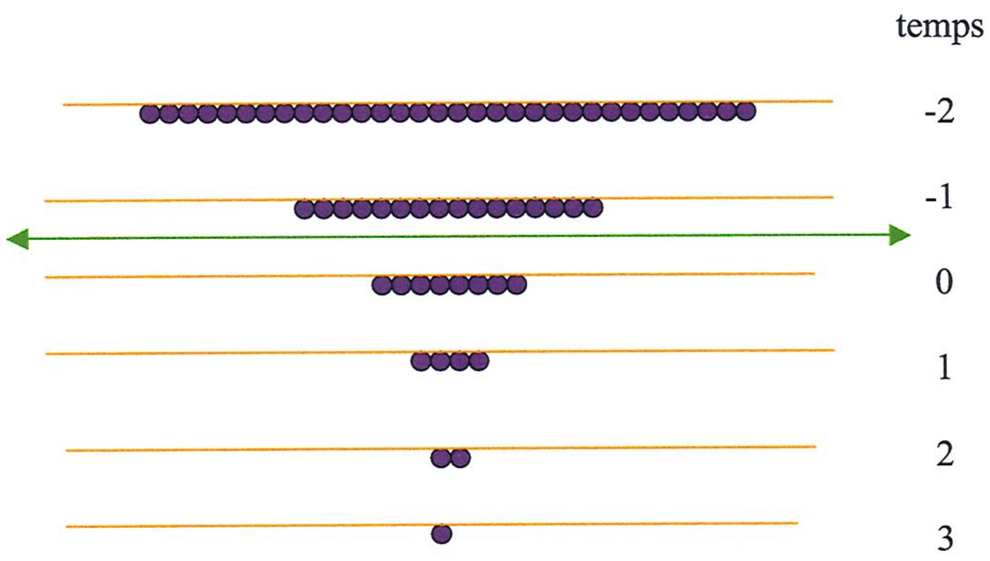
Contenu et découpages en écrans

De même que lors de l'étude des fonctions exponentielles croissantes, nous étendons notre exposé des fonctions exponentielles décroissantes à valeurs négatives du temps en proposant d'explorer le passé. C'est l'objet de la présente UA, composée de 3 écrans.

Exploration de l'histoire antérieure

Lorsque nous observons 8 poissons par m^3 au temps initial, il y a nécessairement une histoire antérieure, *que nous nous proposons d'explorer. (XVII)*

(XVII)



Considérons les valeurs de y(t). (XVIII)

On remarque que le nombre de poissons par m^3 vaut :

$y(t) = 8.(1/2)^t$ où t est un nombre entier > 0, < 0 ou = 0

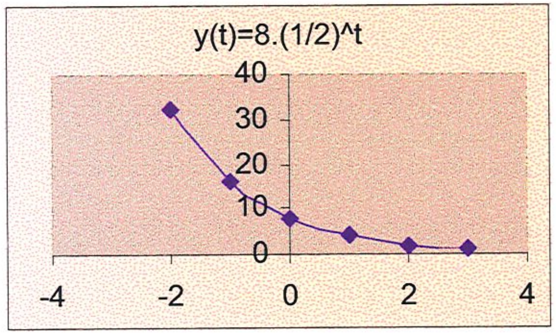
On remarque donc que les valeurs négatives du temps représentent l'historique antérieur au début de l'observation.

Représentons graphiquement ces valeurs. (XIX)

(XVIII)

t	***y(t)***
-2	$32=8.(1/2)^{-2}$
-1	$16=8.(1/2)^{-1}$
0	$8 = 8.(1/2)^0$
1	$4 = 8.(1/2)^1$
2	$2 = 8.(1/2)^2$
3	$1 = 8.(1/2)^3$

(XIX)



Discussions

Lorsque l'apprenant commence l'UA, la première partie du schéma apparaît, c'est-à-dire la partie relative à des valeurs positives du temps (partie en dessous de la double flèche). Lorsqu'il clique pour explorer le passé, la partie supérieure du schéma apparaît pour laisser voir des valeurs du temps négatives.

Ces données sont alors reprises dans un tableau que l'utilisateur doit nécessairement visionner sur la partie gauche de l'écran. Ces données sont également représentées par un graphe qui permet de bien voir que les fonctions exponentielles sont aussi définies pour des temps négatifs.

Nous avons donc étendu les fonctions exponentielles décroissantes à des valeurs du temps négatives.

10. Synthèse

Contenu et découpages en écrans

Cette dernière UA du parcours intuitif rappelle en un écran les principales caractéristiques des fonctions exponentielles croissantes et décroissantes.

Discussions

Pour chaque type de fonctions exponentielles (croissantes et décroissantes), nous rappelons la forme générale de la fonction, pour quelles valeurs du coefficient de multiplication elles sont définies, le graphe et la signification des deux paramètres.

Les couleurs sont utilisées pour que l'utilisateur perçoive bien la relation entre la valeur du paramètre représentant le coefficient de multiplication et la croissance ou la décroissance de la fonction.

Conclusions

Dans ce mémoire consacré à la production d'un outil d'auto apprentissage interactif des fonctions exponentielles et logarithmes, nous avons développé deux parcours : le parcours théorique et le parcours intuitif. Le parcours théorique est consacré à une étude analytique des fonctions exponentielles et logarithmes. Le parcours intuitif développe, à partir d'exemples concrets, les fonctions exponentielles uniquement. Ce second parcours devrait être complété en étendant l'étude aux fonctions logarithmes, toujours sur base d'exemples concrets. Cet aspect n'a pas été abordé par manque de temps.

Ces deux parcours nous paraissent complémentaires. L'idéal serait que l'apprenant débute son étude par le parcours intuitif et ensuite envisage l'étude du parcours théorique. En effet, lors du parcours intuitif, l'apprenant serait directement confronté à l'utilisation des fonctions exponentielles en sciences de la vie et terminerait son apprentissage par une approche plus théorique.

On pourrait envisager une seconde extension de ce travail en étudiant d'autres fonctions souvent utilisées en sciences de la vie comme par exemple des combinaisons de fonctions exponentielles, la fonction logistique ou encore les équations différentielles.

Un aspect de ce mémoire que j'ai beaucoup apprécié est la collaboration avec les biologistes. En effet, la confrontation de mon point de vue de mathématicienne avec celui des biologistes a été enrichissante. Lors du travail, nous avons dû trouver des compromis entre la rigueur mathématique et l'attrait pour les étudiants en sciences de la vie.

Je pense que si la biologie a besoin des mathématiques, les mathématiques ont aussi besoin de la biologie pour comprendre certains aspects et faire vivre les mathématiques.
Ce projet n'aurait pu voir le jour sans l'aide des biologistes.

Bibliographie

---

[1] AZOULAY, E., Mathématiques - Deug Sciences - Sciences de la vie, Sciences de la terre, Paris, Ediscience, 1998, 3ème édition.

[2] BAIR, J., Mathématiques générales à l'usage des Sciences économiques de gestion et A.E.S., Bruxelles, De Boeck Université, 1993.

[3] BARNETT, R.A., ZIEGLER, M.R.,Calculus for Business, Economics, Life Sciences, and Social Sciences, USA, Dellen Macmillan, 1993, sixth edition.

[4] BERTRANDIAS, J.P., F., Mathématiques pour les sciences de la vie, de la nature et de la santé, Grenoble, Presses Universitaires de Grenoble, 1997.

[5] BLONDEL, V., Mathématiques – Analyse – Cours et exercices corrigés, Paris, Dunod, 2000.

[6] COURRIERE, P., PLUSQUELLEC, Y., Mathématiques à l'usage des pharmaciens et des biologistes, Paris, Ellipses, 1997.

[7] DOWLING, E.T., Mathématiques pour l'économiste – cours et problèmes, Paris, Mc Graw-Hill, 1990.

[8] ESCH, L., Mathématiques pour économistes et gestionnaires – Ouvertures économiques, Bruxelles, De Boeck Universités, 1992.

[9] GELLER, S., Abrégé de Mathématiques, Paris, Masson, 1978, 2ème édition.

[10] HERMANN, L., GREMY, F., Sciences mathématiques au service de la médecine – Bases mathématiques pour la recherche médicale et biologique – Tome 1, Paris, Dunod, 1969.

[11] HOUSEN, I., CALMANT, P., N'DAYE, M., VAISER, D., DEBAENST, A., ROUSSELET, D., NOIRHOMME, M., VANDEHAUTE, J., DEPIEREUX, E., Programme multimédia d'apprentissage des principes et des applications du génie génétique, Namur, Presses Universitaires de Namur & Département de biologie, 2001, ISBN : 2-87037-337-6.

[12] HUGHES-HALLETT, D., GLEASON, A.M., et al., Calculus, Canada, John Wiley and Sons, 1994.

[13] KALMAN, D., Elementary Mathematical Models – Order Aplenty and a Glimpse of chaos, USA, American University, 1997.

[14] LECERF, A., Couplage d'un glossaire avec un système d'apprentissage multimédia, Institut d'informatique, FUNDP, Namur, 2001.

[15] SWOKOWSKI, Analyse, Bruxelles, De Boeck Université, 2000, 5ème édition.

[16] TEBBUTT, P., Basic Mathematics for Chemists, Grande-Bretagne, Wiley, 1994.

[17] THIRY, S., Première candidature en Sciences biologiques – Mathématiques – Tome 1 et 2, Namur, Librairie des Sciences, 2000.